Examen de Matemáticas II (Ordinaria 2021)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Solución:
Si una acción de B cuesta 1 € $\Longrightarrow$ una acción A cuesta 3 € $\Longrightarrow$ una acción C cuesta 6 €.
Sean x el número de acciones de A, y el número de acciones de B y z el número de acciones de C. Tendremos:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=540 \\ 3x+y+6z=1560 \\ z=\dfrac{y}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=540 \\ 3x+y+6z=1560 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=360 \\ y=120 \\ z=60 \end{array}\right.$$

A cada hermano le corresponderán $\dfrac{360}{3}=120$ acciones de A, $\dfrac{120}{3}=40$ acciones de B y $\dfrac{60}{3}=20$ acciones de C.

Problema 2 *(2,5 puntos)* Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

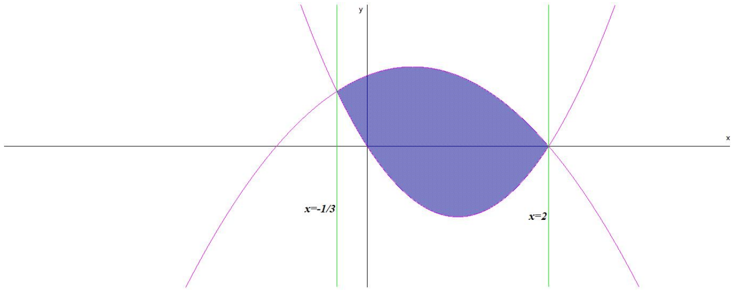
$$f(x)=2+x-x^2, \quad g(x)=2x^2-4x$$

Solución:

$$f(x)=g(x) \Longrightarrow 2+x-x^2=2x^2-4x \Longrightarrow -3x^2+5x+2=0 \Longrightarrow x=-\frac{1}{3}, \quad x=2$$

$$S_1=\int_{-1/3}^{2}\left[2+x-x^2-(2x^2-4x)\right]\,dx=\int_{-1/3}^{2}(-3x^2+5x+2)\,dx=$$

$$\left.-x^3+\frac{5x^2}{2}+2x\right]_{-1/3}^{2}=\frac{343}{54} \Longrightarrow S=|S_1|=\frac{343}{54}\;u^2$$



Problema 3 *(2,5 puntos)* Sean la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{array} \right.$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-z+3=0$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z-y=0$.

c) (0,75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

a) $\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2,1,-1)$ y un punto de la recta puede ser $P_r(-1,0,-1)$. El vector ortogonal al plano π es $\overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1)$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_\pi}|} = \frac{|-4+1+1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha = 19^\circ 28' 16,39''$$

b) Calculamos el punto de intersección de r con π, tenemos:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-2,1,-1) \\ P_r(-1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1-2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1-\lambda \end{array} \right.$$

Sustituyendo en $\pi \Longrightarrow 2(-1-2\lambda)+\lambda-(-1-\lambda)+3=0 \Longrightarrow \lambda = 1$
y sustituyendo en $r \Longrightarrow A(-3,1,-2)$
Para calcular el simétro de A respecto del plano $\pi' : -y+z=0$ seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi'/A \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi'}}(0,-1,1) \\ P_t = A(-3,1,-2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 1-\lambda \\ z = -2+\lambda \end{array} \right.$$

☛ Calculamos el punto de corte A' de t con π':

$$-(1-\lambda)+(-2+\lambda)=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{3}{2}$$

Sustituyendo en $t \Longrightarrow A'\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

☛ Calculamos el punto de corte A'' sabiendo que A' es el punto medio entre A'' y A:

$$A'=\frac{A+A''}{2} \Longrightarrow A''=2A'-A=(-6,-1,-1)-(-3,1,-2)=(-3,-2,1)$$

c) Calculamos la recta proyección como intersección de dos planos, uno de ellos es $\pi: 2x+y-z+3=0$ y el otro π'' será un plano perpendicular a π que contenga a r:

$$\pi'':\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi}=(2,1,-1)\\ \overrightarrow{u_r}=(-2,1,-1)\\ P_r(-1,0,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi'':\left|\begin{array}{ccc} x+1 & y & z+1\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi'': y+z+1=0$$

$$h:\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z+3=0\\ y+z+1=0\end{array}\right. \Longrightarrow h:\left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda\\ y=-1-\lambda\\ z==\lambda\end{array}\right.$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8,8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0,5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8-c;8,8+c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

Solución:

$$N(8,8;3)$$

a) $P(X\geq 10)=P\left(Z\geq\frac{10-8,8}{3}\right)=P(Z\geq 0,4)=1-P(Z\leq 0,4)=$ $1-0,6554=0,3446 \Longrightarrow 34,46\ \%$

$P(7\leq X\leq 10)=P\left(\frac{7-8,8}{3}\leq Z\leq\frac{10-8,8}{3}\right)=P\left(-0,6\leq Z\leq 0,4\right)=$ $P(Z\leq 0,4)-P(Z\leq -0,6)=P(Z\leq 0,4)-(1-P(Z\leq 0,6))=$ $0,6554-1+0,7257=0,3811 \Longrightarrow 38,11\ \%$

b) Se trata de una binomial $p = P(X \le 10) = P\left(Z \le \dfrac{10-8,8}{3}\right) =$
$P(Z \le 0,4) = 0,6554$
$B(4;0,6554)$, $n = 4$, $p = 0,6554$ y $q = 1 - 0,6554 = 0,3446$

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0,6554^0 \cdot 0,3446^4 = 0,9859$$

c)

$$P(8,8 - c; 8,8 + c) = P\left(\frac{8,8 - c - 8,8}{3} \le Z \le \frac{8,8 + c - 8,8}{3}\right) =$$

$P\left(\dfrac{-c}{3} \le Z \le \dfrac{c}{3}\right) = P\left(Z \le \dfrac{c}{3}\right) - P\left(Z \le \dfrac{-c}{3}\right) = P\left(Z \le \dfrac{c}{3}\right) - \left(1 - P\left(Z \le \dfrac{c}{3}\right)\right) =$
$2P\left(Z \le \dfrac{c}{3}\right) - 1 = 0,98 \Longrightarrow P\left(Z \le \dfrac{c}{3}\right) = 0,99 \Longrightarrow \dfrac{c}{3} = 2,325 \Longrightarrow c = 6,975$

De otra forma:

$$NC = 0,98 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,02 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01$$
$$P\left(Z \le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,01 = 0,99 \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,325$$
$$c = E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma = 2,325 \cdot 3 = 6,975$$

Examen de Matemáticas II (Ordinaria 2021) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax - 2y + (a-1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a-1 & 4\\ -2 & 3 & -6 & 2\\ -a & 1 & -6 & 6\end{array}\right);\quad |A|=3a^2-29a+26=0\Longrightarrow a=1,\ \ a=\frac{26}{3}$$

- ☛ Si $a\neq 1$ y $a\neq \dfrac{26}{3}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a=26/3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 26/3 & -2 & 23/3 & 4\\ -2 & 3 & -6 & 2\\ -26/3 & 1 & -6 & 6\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} 3F_1\\ F_2\\ 3F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12\\ -2 & 3 & -6 & 2\\ -26 & 3 & -18 & 18\end{array}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 13F_2+F_1\\ F_3+F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12\\ 0 & 33 & -55 & 38\\ 0 & -3 & 5 & 30\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 11F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 26 & -6 & 23 & 12\\ 0 & 33 & -55 & 38\\ 0 & 0 & 0 & 368\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- ☛ Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4\\ -2 & 3 & -6 & 2\\ -1 & 1 & -6 & 6\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+2F_1\\ F_3+F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & -6 & 10\\ 0 & -1 & -6 & 10\end{array}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4\\ 0 & -1 & -6 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $a=1$:

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y=4\\ -2x+3y-6z=2\\ -x+y-6z=6\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-16-12\lambda\\ y=-10-6\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Se considera la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} \sin x & \text{si} & x<0\\ xe^x & \text{si} & x\geq 0\end{array}\right.$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$ Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

c) (0,75 puntos) Calcule $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

Solución:

a) ☛ **Continuidad en $x = 0$:**

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \sin x = 0 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} xe^x = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

☛ **Derivabilidad en $x = 0$:**

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \cos x & \text{si} & x < 0 \\ e^x(x+1) & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ derivable en } x = 0$$

b) ☛ $\cos x = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2}$ en el intervalo $(-\pi, 0)$.
$e^x(x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1 \notin [0, 2]$ Luego:

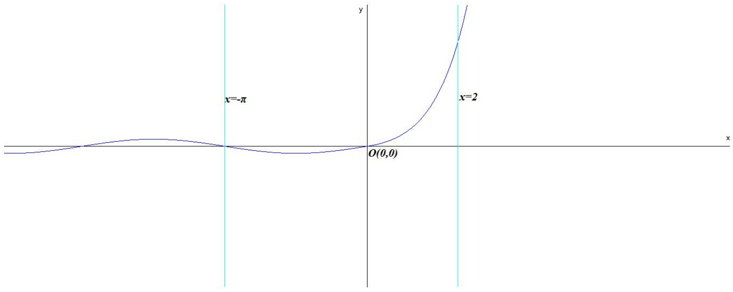
	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(0, 2)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 2\right)$, con un mínimo relativo en $\left(-\dfrac{\pi}{2}, -1\right)$.

☛ En el intervalo $[0, 1]$ es $f(x) = xe^x$. Sea la función $g(x) = xe^x - 2$ en este intervalo y tenemos:
$g(0) = -2 < 0$ y $g(1) = e - 2 > 0$, como g es continua en el intervalo podemos aplicar el teorema de Bolzano que nos afirma que $\exists x_0 \in (0, 1)$ tal que $g(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0e^{x_0} - 2 = 0 \Longrightarrow x_0e^{x_0} = 2 \Longrightarrow f(x_0) = 2$.

c) $\displaystyle\int xe^x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x \end{array}\right] = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx + \int_{0}^{1} xe^x\,dx = -\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + e^x(x-1)\Big]_{0}^{1} = -1 + 1 = 0$



Problema 3 *(2,5 puntos)* Sean los planos $\pi_1 \equiv x+y=1$ y $\pi_2 \equiv x+z=1$.

a) (1,5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0,5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0,2,0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) (0,5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.

Solución:

a) Los planos paralelos a π_1 tienen de ecuación $\pi' : x+y+\lambda = 0$

$$d(O,\pi') = \frac{|0+0+\lambda|}{\sqrt{2}} = 2 \Longrightarrow |\lambda| = 2\sqrt{2} \Longrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{2}$$

Los planos serían: $\pi_1' : x+y+2\sqrt{2} = 0$ y $\pi_2' : x+y-2\sqrt{2} = 0$

b) $$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1,0,1) \\ P_r(0,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c) $\pi_1 : x+y=1$ con eje OX hacemos $y=0$ y $z=0 \Longrightarrow x=1 \Longrightarrow A(1,0,0)$
$\pi_1 : x+y=1$ con eje OY hacemos $x=0$ y $z=0 \Longrightarrow y=1 \Longrightarrow B(0,1,0)$

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(-1,1,0)| = \sqrt{2}\ u$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0,16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0,33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0,08.

a) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

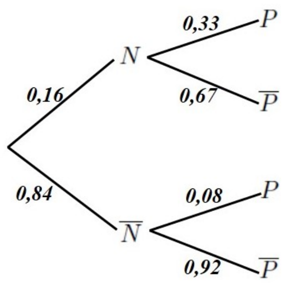
b) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos ”en un día se supera el nivel permitido de NO_2” y ”en un día se supera el nivel permitido de partículas”?

d) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Solución:

N: supera los niveles de NO_2 y P: supera los niveles partículas.



a) $P(N \cap P) = P(N)P(P|N) = 0,16 \cdot 0,33 = 0,0528$

b) $P(P) = P(P|N)P(N)+P(P|\overline{N})P(\overline{N}) = 0,33{\cdot}0,16+0,08{\cdot}0,84 = 0,12$
$P(N\cup P) = P(N)+P(P)-P(N\cap P) = 0,16+0,12-0,0528 = 0,2272$

c) $P(N) \cdot P(P) = 0,16 \cdot 0,12 = 0,0192 \neq P(N \cap P) \Longrightarrow N$ y P no son independientes.

d) $P(N|\overline{P}) = \dfrac{P(\overline{P}|N)P(N)}{P(\overline{P})} = \dfrac{0,67 \cdot 0,16}{1-0,12} = 0,122$