Examen de Matemáticas II (Extraordinaria 2021) Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25 % de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Solución:

Sean x el número de seguidores de Sara, y el número de seguidores de Cristina y z el número de seguidores de Jimena. Tendremos:

$$\begin{cases} x+y+z=15000 \\ 0,75z=3x \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=15000 \\ 4x-z=0 \\ 10x+4y-5z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2000 \\ y=5000 \\ z=8000 \end{cases}$$

Sara tiene 2000 seguidores, Cristina 5000 seguidores y Jimena 8000 seguidores.

Problema 2 *(2,5 puntos)*

a) (1,25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1 (0,5 puntos) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}$ a.2 (0,75 puntos) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación:** use el cambio de variable $t=\dfrac{1}{x}$ donde sea necesario).

b) (1,25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1 (0,5 puntos) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$ b.2 (0,75 puntos) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$

Solución:

a) a.1 $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x^3}{x-2x^2-\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=}$
$\lim_{x\to 0} \dfrac{2-12x}{-4+\sin x} = -\dfrac{1}{2}$

a.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right)=\left[\begin{array}{c} t=\dfrac{1}{x}\\ x\to\infty\Longrightarrow t\to 0\end{array}\right]=\lim\limits_{t\to 0}t\left(3t-\frac{2}{\sin t}\right)=$

$\lim\limits_{t\to 0}t\left(\frac{3t\sin t-2}{\sin t}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{3t^2\sin t-2t}{\sin t}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}$

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{6t\sin t+3t^2\cos t-2}{\cos t}=-2$

b) b.1 $\int\frac{x}{x^2-1}\,dx=\left[\begin{array}{c} t=x^2-1\\ dt=2xdx\\ dx=\dfrac{dt}{2x}\end{array}\right]=\int\frac{x}{t}\frac{dt}{2x}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt=$

$\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$

b.2 $\int x^2e^{-x}\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x^2\Longrightarrow du=2xdx\\ dv=e^{-x}dx\Longrightarrow v=-e^{-x}\\ \int udv=uv-\int vdu\end{array}\right]=$

$-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\,dx=\left[\begin{array}{c} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=e^{-x}dx\Longrightarrow v=-e^{-x}\\ \int udv=uv-\int vdu\end{array}\right]=$

$-x^2e^{-x}+2\left[-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx\right]=-x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)=$
$-e^{-x}(x^2+2x+2)$

$$\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx=-e^{-x}(x^2+2x+2)\big]_0^1=2-\frac{5}{e}\simeq 0,161$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r\equiv x-1=y+1=\dfrac{z-2}{2}$ y el plano $\pi\equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0,75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,2)\\ P_r(1,-1,2)\end{array}\right.\qquad \overrightarrow{u_\pi}=(1,1,-1)$$

a) El plano $\pi'\perp r\Longrightarrow\overrightarrow{u_{\pi'}}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,2)\Longrightarrow\pi':x+y+2z+\lambda=0$ imponiendo $A\in\pi'\Longrightarrow 1+0-2+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=1\Longrightarrow\pi':x+y+2z+1=0$
$\cos\alpha=\dfrac{|u_\pi\cdot u_{\pi'}|}{|u_\pi|\cdot|u_{\pi'}|}=\dfrac{|(1,1,-1)\cdot(1,1,2)|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{0}{3\sqrt{2}}=0\Longrightarrow\alpha=90^\circ$

b) Para que este apartado tenga sentido r y π tienen que ser paralelos. En efecto, $\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,2)\cdot(1,1,-1) = 1+1-2 = 0$.
Por el apartado anterior ya sabíamos que $r \parallel \pi$.

Elegimos un punto $B(1,-1,2) \in r$ y calculamos la distancia de B a π

$$d(B,\pi) = \frac{|1-1-2-6|}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\ u$$

c) La recta s que buscamos es perpendicular a r y paralela a π por lo que $\overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s} \perp \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_\pi} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$
$(-3,3,0) = 3(-1,1,0)$

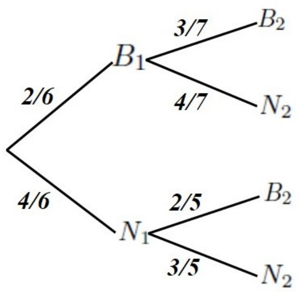
$$s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,1,0) \\ P_s = A(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow s: \left\{ \begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b) (1,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

Solución:
B_1: sale blanca en la primera extracción, N_1: sale negra en la primera extracción, B_2: sale blanca en la segunda extracción y N_2: sale negra en la segunda extracción.



a) $P(\text{distinto color}) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = P(N_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{2}{6} + \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{16}{35} = 0,457$

b) $P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{2}{6} + \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{43}{105}$

$P(N_1|B_2) = \dfrac{P(B_2|N_1)P(N_1)}{P(B_2)} = \dfrac{\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{43}{105}} = \dfrac{28}{43} = 0,651$

Examen de Matemáticas II (Ordinaria 2021) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)*

a) (0,75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x = 1,\ y = 2\}$ y $\{x = 0,\ y = 0\}$.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

c) (0,75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

Solución:

a) Un sistema de ecuaciones lineales o bien tiene solución única o bien tiene infinitas soluciones o bien no tiene solución. Luego el caso que nos ocupa debe de tener infinitas soluciones, como una de ellas tiene que ser $\{x = 0,\ y = 0\}$ las infinitas soluciones buscadas serían:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow \lambda = x = \frac{y}{2} \Longrightarrow 2x - y = 0$$

La segunda ecuación del sistema tiene que ser proporcional

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -6x + 3y = 0 \end{cases}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda-2 \\ z=\lambda-1 \end{array}\right. \Longrightarrow \lambda=x=y+2=z+1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y+2 \\ x=z+1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=2 \\ x-z=1 \end{array}\right.$$

c) Calculamos un sistema con la solución buscada, por ejemplo

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ x-y=-1 \end{array}\right.$$

Como el sistema tiene que ser compatible determinado la tercera ecuación tiene que ser irrelevante, hacemos una combinación lineal de las dos, por ejemplo multiplico la segunda por 3 y le sumo la primera. Me queda el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ x-y=-1 \\ 5x-2y=1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x)=x^3-|x|+2$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0,75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y=0$, y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Solución:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} x^3+x+2 & \text{si} & x<0 \\ x^3-x+2 & \text{si} & x\geq 0 \end{array}\right.$$

a) ☛ **Continuidad en** $x=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-}(x^3+x+2)=2 \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}(x^3-x+2)=2 \\ f(0)=2 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x=0$$

Luego f es continua en $\mathbb{R}$

☛ **Derivabilidad en $x = 0$:**

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x^2 - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 1 \\ f'(0^+) = -1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f \text{ no es derivable en } x = 0$$

Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) En la rama $x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ no hay extremos en la rama y la función es siempre creciente. En el intervalo $(-\infty, 0)$.

En la rama $x \geq 0 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ la solución negativa no es válida por estar fuera de la rama. Para saber qué tipo de extremo es recurrimos a la segunda derivada: $f''(x) = 6x \Longrightarrow f''\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ es un mínimo relativo.

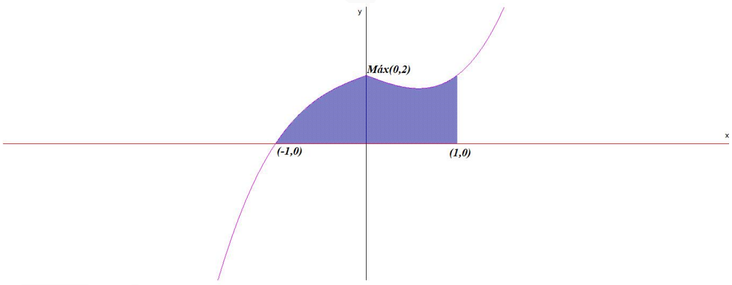
En $x = 0$ la función pasa de crecer a decrecer y además es continua, por lo que en $x = 0$ hay un máximo relativo.

c) Hay dos recintos de integración $[-1, 0]$ y $[0, 1]$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 + x + 2)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0} = \frac{5}{4}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} (x^3 - x + 2)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} = \frac{7}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3\ u^2$$



Problema 3 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \quad s \equiv \begin{cases} x + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-3)\\ P_r(2,-1,-4)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}x=2-\lambda\\ y=1+2(2-\lambda)+2\lambda=5\\ z=\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-1,0,1)\\ P_s(2,5,0)\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{array}\right|=(1,2,1)$ Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,2,1)\\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,-3)\\ P_r(2,-1,-4)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:=\left|\begin{array}{ccc}x-2 & y+1 & z+4\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$\pi_1: 7x-4y+z-14=0$$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,2,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(-1,0,1)\\ P_s(2,5,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_2:=\left|\begin{array}{ccc}x-2 & y-5 & z\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$

$$\pi_2: x-y+z+3=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}7x-4y+z-14=0\\ x-y+z+3=0\end{array}\right.$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s}=(2,5,0)-(2,-1,-4)=(0,6,4)$

$\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right|=|\left|\begin{array}{ccc}0 & 6 & 4\\ 1 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 1\end{array}\right||=|16|=16$

$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\overrightarrow{u_t}|=|(1,2,1)|=\sqrt{6}$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{16}{\sqrt{6}}=\frac{8\sqrt{6}}{3}\ u$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) (1,5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Solución:

$$B(100; 0,45), \quad n = 100, \quad p = 0,45, \quad q = 1 - p = 0,55$$

a) $P(X = 40) = \binom{100}{40} 0,45^{40} \cdot 0,55^{60} = 0,0488$

b) $n = 100 > 10, \quad np = 45 > 5, \quad nq = 55 \Longrightarrow$

$$B(100; 0,45) \overset{N(np;\sqrt{npq})}{\longrightarrow} N(45; 4,975)$$

$P(X = 40) = \left(\dfrac{39,5 - 45}{4,975} \le Z \le \dfrac{40,5 - 45}{4,975} \right) = P(-1,11 \le Z \le -0,9) = P(Z \le -0,9) - P(Z \le -1,11) = 1 - P(Z \le 0,9) - (1 - P(Z \le 1,11)) = P(Z \le 1,11) - P(Z \le 0,9) = 0,8665 - 0,8159 = 0,0506$