Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2021

Problema 1 Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas rojas. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.
Solución:

a) $B(9, 0, 4)$

b) Media$= np = 9 \cdot 0,4 = 3,6$ y la desviación típica$= \sqrt{npq} = \sqrt{9 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,4697$

c) $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{9}{0} 0,4^0 0,6^9 + \binom{9}{1} 0,4^1 0,6^8 + \binom{9}{2} 0,4^2 0,6^7 + \binom{9}{3} 0,4^3 0,6^6 + \binom{9}{4} 0,4^4 0,6^5 = 0,7334$

Problema 2 El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu = 2,8$ kg y desviación típica σ. Se sabe que sólo el 20,05 % de ellos pesa más de 3 kg.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?

b) Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.
Solución:

a)

$$N(2,8; \sigma)$$

$P(X \geq 3) = P\left(Z \geq \dfrac{3 - 2,8}{\sigma}\right) = 0,2005 \Longrightarrow P\left(Z \leq \dfrac{0,2}{\sigma}\right) = 1 - 0,2005 = 0,7995 \Longrightarrow \dfrac{0,2}{\sigma} = 0,84 \Longrightarrow \sigma = 0,2381$

$$N(2,8; 0,2381)$$

$$P(X \geq 2,6) = P\left(Z \geq \frac{2,6 - 2,8}{0,2381}\right) = P(Z \geq -0,84) = P(Z \leq 0,84) = 0,7995$$

b) Calculada en el apartado anterior.

c) $P(X \leq 2,9) = P\left(Z \leq \dfrac{2,9-2,8}{0,2381}\right) = P(Z \leq 0,42) = 0,6628$

Problema 3 En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0,4, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

Solución:
$B(6000; 0,167)$, $n = 6000 > 10$, $np = 6000 \cdot 0,167 = 1000 > 5$, $nq = 6000 \cdot 0,833 = 5000 > 5 \Longrightarrow$ $B(6000; 0,167) \approx N(np, \sqrt{npq}) = N(1000, 28, 87)$

a) Se trata de una binomial $B(30; 0,4)$, $n = 30 > 10$, $np = 30 \cdot 0,4 = 12 > 5$ y $nq = 30 \cdot 0,6 = 18$. La distribución binomial se puede aproximar mediante una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(12; 2,6833)$

b) $P(X = 8) = \binom{30}{8} 0,4^8 0,6^{22} = 0,0505$. De otra manera:
$P(X = 8) = P(7,5 \leq X \leq 8,5) = P\left(\dfrac{7,5-12}{2,6833} \leq Z \leq \dfrac{8,5-12}{2,6833}\right) =$
$P(-1,68 \leq Z \leq -1,30) = P(Z \leq -1,30) - P(Z \leq -1,68) =$
$(1 - P(Z \leq 1,30)) - (1 - P(Z \leq 1,68)) = P(Z \leq 1,68) - P(Z \leq 1,30) = 0,9535 - 0,9032 =$
$0,0503$

c) $P(10 \leq X \leq 20) = P\left(\dfrac{9,5-12}{2,6833} \leq Z \leq \dfrac{20,5-12}{2,6833}\right) = P(-0,93 \leq Z \leq 3,17) =$
$P(Z \leq 3,17) - P(Z \leq -0,93) = P(Z \leq 3,17) - (1 - P(Z \leq 0,93)) =$
$P(Z \leq 3,17) + P(Z \leq 0,93) - 1 = 0,9992 + 0,8238 - 1 = 0,823$

Problema 4 Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,25$ y $P(A \cap B) = 0,125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) ¿Son A y B independientes?

c) Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ (donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) Calcular la probabilidad $P(\overline{B}|A)$

Solución:

a) $P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(\phi) = 0 \Longrightarrow A \cup B$ y C son incompatibles.

b) $P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 = P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,5 + 0,25 - 0,125) = 0,375$

d) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,5 - 0,125}{0,5} = 0,75$

Problema 5 En una empresa el 70 por ciento de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 por ciento gana más de 1000 €. Entre las no satisfechas solo el 20 por ciento gana más de 1000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de 1000 €?

b) Si gana más de 1000 €, ¿cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

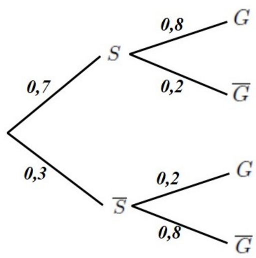
c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1000 € y esté satisfecha con su contrato?

Solución:
Sea S al suceso "satisfecho con el contrato" y G al suceso "gana más de 1000 €".
Tenemos: $P(S) = 0,7$, $P(G|S) = 0,8$ y $P(G|\overline{S}) = 0,2$.

a) $P(G) = P(G|S)P(S) + P(G|\overline{S})P(\overline{S}) = 0,8\cdot 0,7 + 0,2\cdot 0,3 = 0,62$

b) $P(S|G) = \dfrac{P(G|S)P(S)}{P(G)} = \dfrac{0,8\cdot 0,7}{0,62} = 0,9032$

c) $P(\overline{G}\cap S) = P(S) - P(S\cap G) = P(S) - P(G|S)P(S) =$
$0,7 - 0,8\cdot 0,7 = 0,7\cdot 0,2 = 0,14.$



Problema 6 En un instituto el 40 por ciento de sus alumnos tiene el cabello castaño, el 35 por ciento tiene los ojos azules y el 15 por ciento tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos azules?

b) Si tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño ni los ojos azules?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

Solución:
Sea C al suceso "cabello castaño" y A al suceso "ojos azules":
Tenemos $P(C) = 0,4$, $P(A) = 0,35$ y $P(C\cap A) = 0,15$).

	C	$\overline{C}$	Total
A	$0,15$		$0,35$
$\overline{A}$			
	$0,40$		1

$\Longrightarrow$

	C	$\overline{C}$	Total
A	$0,15$	$0,20$	$0,35$
$\overline{A}$	$0,25$	$0,40$	$0,65$
	$0,40$	$0,60$	1

a) $P(A|C) = \dfrac{P(A\cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,15}{0,4} = 0,375.$

b) $P(\overline{C}|A) = \dfrac{P(A \cap \overline{C})}{P(A)} = \dfrac{0,20}{0,35} = 0,571.$

c) $P(\overline{C} \cap \overline{A}) = 0,40$ ver tabla.

d) $P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) = 0,4 + 0,35 - 0,15 = 0,60.$