Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2021

Problema 1 Sea la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$)

Solución:

$$F(x)=\int\frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx=\left[\begin{array}{l} t=e^x\Longrightarrow dt=e^x dx\\ dx=\frac{1}{e^x}dt\Longrightarrow dx=\frac{1}{t}dt\end{array}\right]=\int\frac{1+t}{t(1-t)}\,dt=$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{1+t}{t(1-t)}=\frac{A}{t}-\frac{B}{t-1}=\frac{-A(t-1)+Bt}{t(1-t)}\\ 1+t=-A(t-1)+Bt\\ t=0\Longrightarrow 1=A\\ t=1\Longrightarrow 2=B\\ \frac{1+t}{t(1-t)}=\frac{1}{t}-\frac{2}{t-1}\end{array}\right]=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t-1}\right)dx=$$

$$\ln|t|-2\ln|t-1|+C=\ln|e^x|-2\ln|e^x-1|+C=x-\ln(e^x-1)^2+C$$

$$F(1)=1-2\ln(e-1)+C=1\Longrightarrow C=2\ln(e-1)\simeq 1,083$$

$$F(x)=x-\ln(e^x-1)^2+2\ln(e-1)$$

Problema 2 Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.

a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.

b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución:

a) $f'(x)=e^x(x-a+1)$ como $f'(0)=0\Longrightarrow -a+1=0\Longrightarrow a=1$

b) Si $a=1\Longrightarrow f(x)=(x-1)e^x\Longrightarrow f'(x)=xe^x\Longrightarrow f'(x)=(x+1)e^x=0\Longrightarrow x=-1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

La función cambia de curvatura en $x=-1$ y en ese punto la función tiene continuidad y, por tanto, se trata de un punto de inflexión.

Problema 3 Considera las funciones $f:(-2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\dfrac{1}{2}(x-3)$.

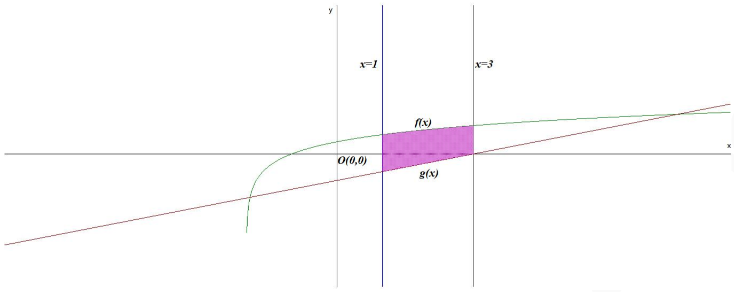
a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas)

www.musat.net

b) Determina el área del recinto anterior.

Solución:

a) Dando valores se obtiene:



b)

$$S=\int_1^3\left(\ln(x+2)-\frac{1}{2}(x-3)\right)dx=(x+2)\ln(x+2)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\Big]_1^3=$$

$$\ln\left(\frac{3125}{27}\right)-1\simeq 3,751\ u^2$$

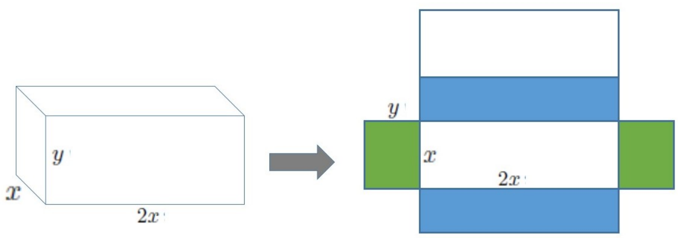
Inciso:

$$\int\ln(x+2)\,dx=\left[\begin{array}{l} u=\ln(x+2)\Longrightarrow du=\frac{1}{x+2}dx \\ dv=dx\Longrightarrow v=x\end{array}\right]=x\ln(x+2)-\int\frac{x}{x+2}\,dx=$$

$$x\ln(x+2)-\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx=x\ln(x+2)-x+2\ln(x+2)=(x+2)\ln(x+2)-x$$

Problema 4 Se desea construir un contenedor con la forma habitual de una caja (tipo caja de zapatos cerrada) cuya capacidad sea de 35 m^3. Dado que el único material empleado para su construcción es bastante costoso, se desea que la cantidad total de material empleado sea mínima. Además, el contenedor debe ser cerrado, es decir hay que construir sus seis caras.
Sabiendo que la base es un rectángulo cuyo lado largo es el doble que el corto, determine las dimensiones del mismo para que el coste del material empleado para su fabricación sea mínimo.

Solución:



☛ $V(x,y)=2x^2y=35\Longrightarrow y=\dfrac{35}{2x^2}$

- $S(x,y)=4x^2+2xy+4xy=4x^2+6xy$ sustituyendo $y\Longrightarrow$

$$S(x)=4x^2+\frac{210x}{2x^2}=\frac{8x^4+210x}{2x^2}\Longrightarrow S'(x)=\frac{8x^3-105}{x^2}=0\Longrightarrow$$
$$x=\frac{\sqrt[3]{105}}{2}\simeq 2,359\ \text{ m}$$

	$\left(0,\frac{\sqrt[3]{105}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt[3]{105}}{2},\infty\right)$
$S'(x)$	$-$	$+$
$S(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $\left(0,\frac{\sqrt[3]{105}}{2}\right)$ y crece en el intervalo $\left(\frac{\sqrt[3]{105}}{2},\infty\right)$, por tanto, tiene un mínimo en $x=\dfrac{\sqrt[3]{105}}{2}=2,359\Longrightarrow y=\dfrac{35}{2\cdot 2,359^2}=3,145$
Las medidas de la caja tienen que ser $2,359$ m de ancho, $4,718$ m de largo y $3,145$ m de alto.
El área mínima total sería $S(2,359)=66,77$ m^2

Problema 5 Calcule el límite: $\lim_{x\longrightarrow 0^+}(1+x-\sin x)^{1/x^3}$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}(1+x-\sin x)^{1/x^3}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{1}{x^3}(1+x-\sin x-1)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\sin x}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

Luego

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}(1+x-\sin x)^{1/x^3}=e^{1/6}$$