# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

**Noviembre 2020**

**Problema 1** *(2 puntos)*Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real $a$:

$$\left\{\begin{array}{c} x+ay+z=a+1 \\ -ax+y-z=2a \\ -y+z=a \end{array}\right.$$

Se pide:

a) Discutir el sistema según los diferentes valores de $a$.

b) Resolver el sistema para $a=0$.

**Solución:**

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$; $|A|=a(a+1)=0\Longrightarrow a=0$ y $a=-1$.

- Si $a\in\mathbb{R}-\{0,-1\}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow SCD$: Sistema compatible determinado, solución única.
- Si $a=-1$:
$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)=$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)\Longrightarrow SI$: sistema incompatible, no tiene solución.
- Si $a=0$:
$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow SCI$: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Si $a=0$:
$$\left\{\begin{array}{l} x+z=1 \\ y-z=0 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

**Problema 2** *(2 puntos)*Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{array}\right)$, $m\in\mathbb{R}-\{0\}$.

a) Hallar $\alpha$ y $\beta$ de tal forma que $A^2=\alpha A+\beta I$ , siendo $I$ la matriz identidad.

b) Calcular $A^5$ utilizando la anterior igualdad.

**Solución:**

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2A$

$A^2 = \alpha A + \beta I = \alpha \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} =$

$\beta \begin{pmatrix} 2a+b & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ am & 0 & 2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2a+b=4 \\ am=4m \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-4 \end{cases} \Longrightarrow$

$A^2 = 4A - 4I.$

b) $A^5 = AA^2A^2 = A(4A-4I)(4A-4I) = A(16A^2-16A-16A+16I) = 16A(A^2-2A+I) = 16A[(4A-4I)-2A+I] = 16A(2A-3I) = 16(2A^2-3A) = 16[2(4A-4I)-3A] = 16(5A-8I)$

$$A^5 = 16\left[5\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

**Problema 3** *(2 puntos)*Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.

a) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas $A$, $B$ y $C$, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

| Mezcla | Nitrógeno | Oxígeno | Argón |
|---|---|---|---|
| $A$ | 80 % | 20 % | 0 % |
| $B$ | 70 % | 20 % | 10 % |
| $C$ | 60 % | 40 % | 0 % |

**Solución:**

a) Se necesitan: de nitrógeno $2000 \cdot 0,78 = 1560$ l, de oxígeno $2000 \cdot 0,21 = 420$ l y de argón $2000 \cdot 0,01 = 20$ l.

b) Se $x$ el nº litros de mezcla $A$, $y$ el nº litros de mezcla $B$ y $z$ el nº litros de mezcla $C$.

$$\begin{cases} 0,8x + 0,7y + 0,6z = 1560 \\ 0,2x + 0,2y + 0,4z = 420 \\ 0,1y = 20 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1700 \\ y = 200 \\ z = 100 \end{cases}$$

**Problema 4** *(2 puntos)*Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores del parámetro $k$ para los que la matriz A tiene inversa.

b) Tomando el valor $k = -1$ en la matriz $A$, calcule la matriz $X$ que verifica que: $AX = 24I_3$ , siendo $I_3$ la matriz identidad de orden 3.

**Solución:**

a) $|A| = k^3 - 6k^2 + 5k = 0 \Longrightarrow k = 0,\ k = 1$ y $k = 5 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \ \forall k \in \mathbb{R} - \{0, 1, 5\}$.

b) Si $k = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = -\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$AX = 24I_3 \Longrightarrow X = A^{-1}24I_3 = 24A^{-1} = -\frac{24}{12}\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

**Problema 5** *(2 puntos)*Para la ecuacion matricial $A^2X + AB = B$, se pide:

a) Despejar $X$ suponiendo que $A$ (y por tanto $A^2$) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de $X$ y de $B$ si $A$ tuviera dimensión $4 \times 4$ y $B$ tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

**Solución:**

a) $A^2X + AB = B \Longrightarrow A^2X = B - AB \Longrightarrow X = \left(A^2\right)^{-1}(B - AB)$
Tendríamos $\dim(A) = 4 \times 4 \Longrightarrow \dim(B) = 4 \times 3 \Longrightarrow \dim(B - AB) = 4 \times 3$.
Por otro lado $\dim(A) = 4 \times 4 \Longrightarrow \dim(A^2) = 4 \times 4 \Longrightarrow \dim\left(\left(A^2\right)^{-1}\right) = 4 \times 4$
Luego $\dim(X) = 4 \times 3$

b) $X = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}\right] =$

$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lo hacemos de otra manera más simple. Observamos que $B = -A$ y sustituimos este dato en la ecuación y nos queda:
$X = \left(A^2\right)^{-1}(B - AB) = \left(A^2\right)^{-1}(-A + A^2) = -\left(A^2\right)^{-1}A + \left(A^2\right)^{-1}A^2 = -(AA)^{-1}A + I = -A^{-1}A^{-1}A + I = -A^{-1} + I$

$$X = -A^{-1} + I = -\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$