Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2020

Problema 1 *(2,5 puntos)*Discutir el sistema y resolver en los casos compatibles

$$\begin{cases} 2x+y+z=a \\ 2x+y+2z=2a \\ 2x+y+3z=3 \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right),\ |A|=0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2.$$

$$|A_4|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=3-3a=0 \Longrightarrow a=1$$

- Si $a\neq 1 \Longrightarrow |A_4|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3\neq \text{Rango}(A)=2 \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
- Si $a=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 2x+y+3z=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=1 \end{cases}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Se pide:

a) Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C=\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 - F_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} =$
$-a\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = -a\,[a(a+1)-2] = -a(a^2+a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ a = -2$ y $a = 1$.
Luego $\nexists A^{-1}\ \forall a \in \{-2, 0, 1\}$

b) $CD = DC \Longrightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & z+3 \\ x-y & 1-z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+1 = 3x+y \\ x-1 = z+3 \\ 3y+z = x-y \\ y-z = 1-z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x - z = 4 \end{cases} \Longrightarrow$
$\begin{cases} x = 4+\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ con $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$

a) Calcula su determinante aplicando sus propiedades y estudia cuándo es invertible la matriz.

b) Para $x = 1$, calcula su inversa.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} x+1 & x+1 & x-2 \\ x & x & 2-x \\ x & x-1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 - C_2 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x+1 & x-2 \\ 0 & x & 2-x \\ 1 & x-1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & x-2 \\ x & 2-x \end{vmatrix} =$
$\begin{bmatrix} F_1 + F_2 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+1 & 0 \\ x & 2-x \end{vmatrix} = (2x+1)(2-x) = -2x^2+3x+2$
$-2x^2+3x+2 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ y $x = 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}, 2\right\}$.

b) Si $x = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 4 *(2,5 puntos)*En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

a) Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.

b) Clasifica el sistema.

c) Resuelve el sistema.

Solución:
Sean x el n$^{\underline{o}}$ de tanques, y el n$^{\underline{o}}$ de submarinos y z el n$^{\underline{o}}$ de aviones.

a)
$$\left\{\begin{array}{l} x+3y+5z=41\\ y=2x\\ y+z=10\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3y+5z=41\\ 2x-y=0\\ y+z=10\end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 5 & 41\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 10\end{array}\right)=$$
$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-2F_1\\ F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 5 & 41\\ 0 & -7 & -10 & -82\\ 0 & 1 & 1 & 10\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 7F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 5 & 41\\ 0 & -5 & -5 & -41\\ 0 & 0 & -3 & 12\end{array}\right)\Longrightarrow$$
Sistema compatible determinado.

b)
$$\left\{\begin{array}{l} x+3y+5z=41\\ 2x-y=0\\ y+z=10\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3\\ y=6\\ z=4\end{array}\right.$$