Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2020

Problema 1 *(2 puntos)*Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+(m+1)z=2\\ x+(m-1)y+2z=1\\ 2x+my+z=-1 \end{array}\right.$$

Discuta el sistema segun los valores de $m\in\mathbb{R}$.

Solución:

$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & m+1 & 2\\ 1 & m-1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1 & -1 \end{array}\right)$, $|A|=4-m^2=0 \Longrightarrow m=\pm 2$.

- Si $m\in\mathbb{R}-\{0,\pm 2\} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m=-2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -3 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 3 & -1\\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right)=$
$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -4 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema incompatible

- Si $m=2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-2F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right)=$
$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-5F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Problema 2 *(2 puntos)*Considera la matriz $A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & m+2\\ 0 & 1 & m+1\\ m & 0 & 5 \end{array}\right)$

a) Estudia el rango de A según los valores de m.

b) Para $m=2$, calcula la inversa de $2020A$.

Solución:

a) $|A|=-(2m^2+3m-5)=0 \Longrightarrow m=1$ y $m=-\dfrac{5}{2}$.

- Si $m\in\mathbb{R}-\left\{1,-\dfrac{5}{2}\right\} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3$.

- Si $m=1 \Longrightarrow A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=0$ y $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1\\ 0 & 1 \end{array}\right|=1\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=$ 2.

- Si $m=-\dfrac{5}{2} \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ -5/2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.

b) Si $m=2 \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=-\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Luego $(2020A)^{-1}=-\dfrac{1}{2020\cdot 9}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{18180}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 3 *(2 puntos)*Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular A^2-B^2 . (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2 \neq (A-B)(A+B)$)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA+(A+B)^T=2I+XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

a) $A^2-B^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

b) $XA+(A+B)^T=2I+XB \Longrightarrow XA-XB=2I-(A+B)^T \Longrightarrow X(A-B)=2I-(A+B)^T \Longrightarrow X=\left[2I-(A+B)^T\right](A-B)^{-1}$

$$X=\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]^T\right]\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}=$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T\right]\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1}=$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -1/8 & 1/4 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/8 & 1/4 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)*Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX+I_3=BC$; donde I_3 es la matriz identidad.

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $AX + I_3 = BC \Longrightarrow X = A^{-1}(BC - I_3) =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 5 *(2 puntos)*Dado Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora?

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente un 50 %, un 80 % y un 75 % de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo.

Solución:
Sea x el precio del libro, y el precio de la calculadora y z el precio del estuche.

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x = 2(y + z) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 38 \text{ €} \\ y = 19 - \lambda \text{ €} \\ z = \lambda \text{ €} \end{array} \right.$$

El valor del libro es 38 € pero no podemos saber el valor de la calculadora.

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 0,5x + 0,8y + 0,75z = 34 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 57 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 10x + 16y + 15z = 680 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 38 \text{ €} \\ y = 15 \text{ €} \\ z = 4 \text{ €} \end{array} \right.$$