Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Noviembre 2020

Problema 1 *(2,5 puntos)*Sea k un parámetro real y considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \\ x+ky+3z=2 \end{array}\right.$$

Determine los valores del parámetro real k, para lo que ese sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array}\right),\ |A|=-(k^2+k-6)=0 \Longrightarrow k=-3 \text{ y } k=2.$$

- Si $k\neq -3$ y $k\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $k=-3$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+4F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $k=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-F_2 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Calcula todas las matrices $X=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX=XA$, siendo $A=\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$

Solución:

$$AX=XA\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc} -c & -d \\ a & b \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} b & -a \\ d & -c \end{array}\right)\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -c=b \\ -d=-a \\ a=d \\ b=-c \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=d \\ b=-c \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a=d \\ b=-c \\ a+d=1 \\ ad-cb=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=d=\frac{1}{2} \\ b=-c \\ \frac{1}{4}+b=2=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=d=\frac{1}{2} \\ b=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ c=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \text{ o } \left\{\begin{array}{l} a=d=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ c=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

$$X=\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \text{ o } X=\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Se dan las matrices $A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{array}\right)$ y $X=\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX=\alpha X$ sólo admite una solución.

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX=5X$.

c) Comprobar que $X=\left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right)$ es una solución de la ecuación matricial $AX=2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right)=\beta\left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right)$.

Solución:

a) $AX=\alpha X \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} \alpha x \\ \alpha y \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+4y=\alpha x \\ -x+6y=\alpha y \end{array}\right. \Longrightarrow,$

$$\left\{\begin{array}{l} (1-\alpha)x+4y=0 \\ -x+(6-\alpha)y=0 \end{array}\right.$$

Se trata de un sistema homogéneo.
$\left|\begin{array}{cc} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{array}\right|=a^2-7a+10=0 \Longrightarrow a=2$ y $a=5$.
El sistema tiene solución única para cualquier valor real a distinto de $a=2$ y $a=5$. ($\forall a\in\mathbb{R}-\{2,5\}$).

b) Si $\alpha=5$:

$$\left\{\begin{array}{r} -4x+4y=0 \\ -x+y=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=t \end{array}\right.$$

c) $\left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 8 \\ 2 \end{array}\right)$
$2\left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 8 \\ 2 \end{array}\right) \Longrightarrow AX=2X.$
Ahora tenemos
$AX=2X,$
$A^2X=AAX=2AX=2^2X,$
$A^3X=AA^2X=A2^2X=2^3X,$
$A^4X=AA^3X=A2^3X=2^4X,\cdots\cdots\cdots,A^{100}X=2^{100}X \Longrightarrow \beta=2^{100}.$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0,90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el

precio de cada tipo de mascarilla.
Solución:
Sean x el nº de mascarillas quirúrgicas desechables, y al nº de mascarillas higiénicas y z el nº de mascarillas quirúrgicas reutilizables.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x+y+z}{3}=0,9 \\ 30x+20y+10z=56 \\ 20x+25z=31 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=2,7 \\ 15x+10y+5z=28 \\ 20x+25z=31 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0,8 \text{ €} \\ y=1,3 \text{ €} \\ z=0,6 \text{ €} \end{array}\right.$$