Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2020

Problema 1 *(2,5 puntos)*Considera el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución con $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ m & 4 & -2 & 2m \\ 0 & m+2 & -3 & 1 \end{array}\right)$, $|A| = m^2 - 2m - 8 = 0 \Longrightarrow m = -2$ y $m = 4$.

- Si $m \neq -2$ y $m \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si $m = -2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$
$\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) Si $m = -2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 2 \\ -3z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 7/3 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1/3 \end{array} \right.$$

Luego no existe ninguna solución con $z = 0$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las 3 mascarillas es de 0,90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.
Solución:

Sean x el nº de mascarillas quirúrgicas desechables, y al nº de mascarillas higiénicas y z el nº de mascarillas quirúrgicas reutilizables.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x+y+z}{3}=0,9 \\ 30x+20y+10z=56 \\ 20x+25z=31 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=2,7 \\ 15x+10y+5z=28 \\ 20x+25z=31 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0,8 \text{ €} \\ y=1,3 \text{ €} \\ z=0,6 \text{ €} \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa.

b) Los valores de b para que la matriz A^TA tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A.

c) La inversa de A^TA, cuando dicha inversa exista.

Solución:

a) $|AB|=\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \nexists (AB)^{-1}\ \ \forall b\in\mathbb{R}.$

$|BA|=\left|\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{vmatrix}=-2(b^2-6)=0 \Longrightarrow$
$b=\pm\sqrt{6} \Longrightarrow \exists (AB)^{-1}\ \ \forall b\in\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{6}\right\}.$

b) $|A^TA|=\left|\begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}=8(b^2+2)\neq 0 \Longrightarrow$
$\exists (A^TA)^{-1}\ \ \forall b\in\mathbb{R}.$

c) $A^TA=\begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A^TA)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{b^2+2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{8} \end{pmatrix}$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los productos de matrices AB y BA. ¿Se cumple que $AB=BA$?

b) Compruebe si es cierta la igualdad $(A+B)^2=A^2+B^2$.

Solución:

a) $AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow AB\neq BA$

b) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. Para que se cumpla la igualdad del enunciado es necesario que $AB = -BA$, por el apartado anterior no es cierto, luego la igualdad en cuestión no se cumple.