Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Octubre 2020

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & m & -1 \\ 2 & 2 & -m & 2 \\ m & -2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 2 & -m \\ m & -2 & -5 \end{vmatrix} = -2(3m^2 + 7m - 10) = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -\frac{10}{3}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ m & -2 & 7 \end{vmatrix} = 24m - 24 = 0 \Longrightarrow m = 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m & m & -1 \\ 2 & -m & 2 \\ m & -5 & 7 \end{vmatrix} = -6m^2 - 4m + 10 = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -\frac{5}{3}$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 2 & -m \\ m & -2 & -5 \end{vmatrix} = -2(3m^2 + 7m - 10) = 0 \Longrightarrow m = 1, \;\; m = -\frac{10}{3}$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Cuando $m = 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Problema 2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (1 punto). Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.
2. (1 punto). Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

Solución:

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -2 \end{array} \right.$$

$$A^2 = 3A - 2I = 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

2. $A^3 = A^2 \cdot A = (3A - 2I)A = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I) - 2A = 7A - 6I$

$$A^3 = 7 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (7A - 6I)A = 7A^2 - 6A = 7(3A - 2I) - 6A = 15A - 14I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (15A - 14I)A = 15A^2 - 14A = 15(3A - 2I) - 14A = 31A - 30I$$

$$A^5 = 31 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 30 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 & 62 \\ -31 & -30 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 \\ -1/3 & -5/3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a-b \\ -c & c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -a+c=-a \Longrightarrow\ c=0 \\ -b+d=a-b \Longrightarrow\ a=d \\ -c=-c \Longrightarrow\ 0=0 \\ -d=c-d \Longrightarrow\ c=0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.