Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Octubre 2020

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & m & m \\ m & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -m \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & m & m \\ m & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -m \end{vmatrix} = (m-1)(m^2-4) = 0 \Longrightarrow m = \pm 2, \;\; m = 1$$

Si $m = \pm 2$ o $m = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

Si $m \neq \pm 2$ y $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $X - BX = A - CX$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X - BX = A - CX \Longrightarrow X = (I - B + C)^{-1}A$$

$$I - B + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I - B + C)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (I - B + C)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & -1 \\ 0 & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & -1 \\ 0 & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3 + \mathrm{F}_4 \\ \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 \\ \mathrm{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & x-2 & x-2 & x-2 \\ 0 & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & -1 & -1 \\ -1 & -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_4 - \mathrm{C}_1 \end{bmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & -1 \\ -1 & 0 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} =$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 0 & x+1 & 1 \\ 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = x(x-2)(x^2+2x+2)$$