Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2020) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

Solución:

a) $A^2 - 5A = -I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 5a^2-6 & 0 \\ 0 & 5a^2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = \pm 1$

b) Si $a = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 € y 60 € por cada metro cúbico de tipo B.

a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas de sus vértices.

b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restricciones anteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

Solución:

Sea x número de m^3 de tipo A e y número de m^3 de tipo B.

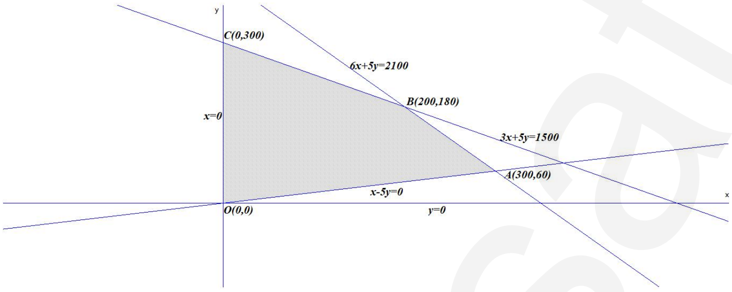
a) Podemos construir la siguiente tabla:

	tierra vegetal	horas de trabajo
A	60	30
B	50	50
Totales	≤ 21000	≤ 15000

La región factible será:

$$\begin{cases} 60x + 50y \le 21000 \\ 30x + 50y \le 15000 \\ x \le 5y \\ x, y \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x + 5y \le 2100 \\ 3x + 5y \le 1500 \\ x - 5y \le 0 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(300,60)$, $B(200,180)$ y $C(0,300)$



b) $f(x,y) = 50x + 60y$ en S: $\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(300,60) = 18600 \\ f(200,180) = 20800 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(0,300) = 18000 \end{cases} \Longrightarrow$

El beneficio máximo será de 20800 € y se alcanza con 200 m^3 de A y 180 m^3 de B.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x}{2x^2+1} & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 2m + \ln x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) Estudie los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.

b) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje OX:

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{6x}{2x^2+1} = 2 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (2m + \ln x) = 2m \\ \\ f(1) = 2m \end{cases} \Longrightarrow 2m = 2 \Longrightarrow m = 1$$

En $x < 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{6x}{2x^2+1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-12x^2+6}{(2x^2+1)^2}$

b) En el intervalo $[-1, 0]$ la función es $f(x) = \dfrac{6x}{2x^2+1}$ y no corta al eje OX en ese intervalo.
$S_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{6x}{2x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\left(\ln(2x^2+1)\right]_{-1}^{0} = -\frac{3\ln 3}{2}$
$S = |S_1| = \left|-\dfrac{3\ln 3}{2}\right| = \dfrac{3\ln 3}{2} \simeq 1,65\ u^2$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A|B) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$ y $P(A) = \dfrac{2}{3}$. Calcule:

a) $P(A \cup \overline{B})$.

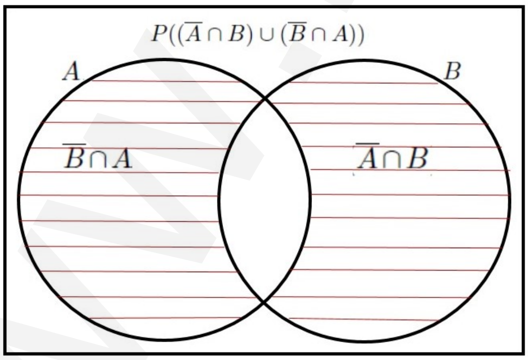
b) $P((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A))$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A\cap B) = P(A|B)P(B) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{24}$.
$P(A\cup\overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A\cap\overline{B}) = P(A) + (1-P(B)) - (P(A) - P(A\cap B) = 1 - P(B) + P(A\cap B) = 1 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{7}{8}$.

b) $P((\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap A)) = P(\overline{A}\cap B) + P(\overline{B}\cap A) - P((\overline{A}\cap B)\cap(\overline{B}\cap A)) = P(B) - P(A\cap B) + P(A) - P(A\cap B) - P(\phi) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6} - 2\cdot\dfrac{1}{24} = \dfrac{3}{4}$.



Problema 5 *(2 puntos)* El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \le 220) = 0,9940$.

Solución:

$$N(\mu; 60)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 20$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{60}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,96 \cdot 60}{20}\right)^2 = 34,57$$

Luego $n = 35$.

b) $P(X \le 220) = P\left(Z \le \dfrac{220-\mu}{60/\sqrt{100}}\right) = P\left(Z \le \dfrac{220-\mu}{6}\right) = 0,9940 \Longrightarrow$
$\dfrac{220-\mu}{6} = 2,51 \Longrightarrow \mu = 204,94 \simeq 205.$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2020) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \overline{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - ay = 1 \\ ax - 4y - z = 2 \\ 2x + ay - z = a - 4 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{array}\right); \quad |A| = -a^2+3a+4 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ a = 4$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

- Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

b) Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{r} x - 3y = 1 \\ 3x - 4y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = -1/2 \\ z = -3/2 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5}$$

a) Calcule el valor del parámetro $a \in \overline{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$.

b) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{ax^2 - 3}{x^2 - 5} = a = -1$$

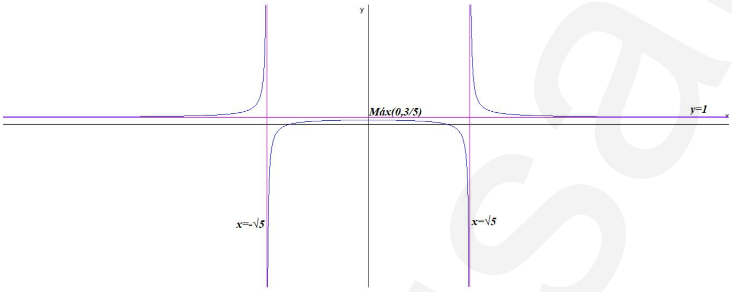
b) Si $a = 1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2-5}$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{5}\}$.

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-5)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

$\Longrightarrow x = 0$ es un máximo local.

La función crece en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, 0)$ y decrece en el intervalo $(0, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$.



Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real

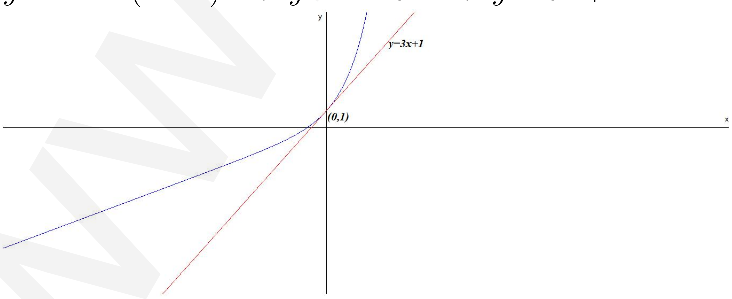
$$f(x) = e^{2x} + x$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$.

b) Calcule
$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Solución:

a) $a = 0$, $f'(x) = 2e^{2x} + 1 \Longrightarrow m = f'(0) = 3$ y $b = f(0) = 1$ como $y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 1 = 3x \Longrightarrow y = 3x + 1$.



b) $\displaystyle\int_0^1 (e^{2x} + x)\,dx = \left.\frac{e^{2x} + x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} \simeq 3,6945$

Problema 4 *(2 puntos)* En un instituto se decide que los alumnos y alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de 0,7. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es 0,2. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que

a) Sea el examen de un alumno.

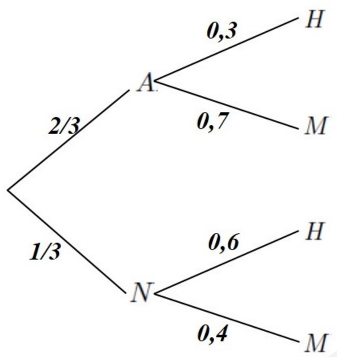
b) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

Solución:

A: azul, N: negro, H: alumno y M: alumna.

$P(A) = \frac{2}{3}$, $P(N) = \frac{1}{3}$, $(M|A) = 0,7$ y $P(N \cap H) = 0,2$

$P(N \cap H) = 0,2 \Longrightarrow P(H|N) = \frac{P(N \cap H)}{P(N)} = \frac{0,2}{1/3} = 0,6$



a) $P(H) = P(H|A)P(A) + P(H|N)P(N) = 0,3 \cdot \frac{2}{3} + 0,6 \cdot \frac{1}{3} = 0,4$

b) $P(H|N) = \frac{P(N \cap H)}{P(N)} = \frac{0,2}{\frac{1}{3}} = 0,6$

Problema 5 *(2 puntos)* Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarda en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26,9; 37,1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del 98,92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.

b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) $E = \dfrac{37,1 - 26,9}{2} = 5,1$ y $\overline{X} = \dfrac{37,1 + 26,9}{2} = 32$.
$NC = 0,9892 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0108 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0054 \Longrightarrow$
$P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,0054 = 0,9946 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,55$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,55\frac{10}{\sqrt{n}} = 5,1 \Longrightarrow n \ge \left(\frac{2,55 \cdot 10}{5,1}\right)^2 = 25$$

Luego $n = 25$.

b) $\mu = 30$ y $n = 16$:
$P(25 \le \overline{X} \le 35) = P\left(\dfrac{25-30}{10/\sqrt{16}} \le Z \le \dfrac{35-30}{10/\sqrt{16}}\right) = P(-2 \le Z \le 2) = P(Z \le 2) - P(Z \le -2) = P(Z \le 2) - (1 - P(Z \le 2)) = 2P(Z \le 2) - 1 = 0,9544$