Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coincidente 2020) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule A^2 y A^{10}.

b) Calcule $(AA - 3I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$,

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 \end{pmatrix}, \ldots, A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$ Se observa como el término a_{12} de las matrices es cero cuando el exponente es par y 2 cuando es impar.

b) $B = AA - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(AA - 3I)^{-1} = B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Considere la región del plano S definida por

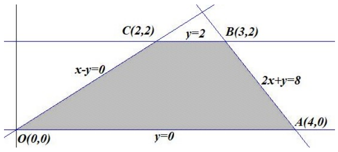
$$x - y \geq 0, \quad y + 2x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 2$$

a) Represente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 4x - y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores.

Solución:

a) Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(3,2)$ y $C(2,2)$



b) $f(x,y) = 4x - y$ en S: $\left\{ \begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(4,0) = 16 \\ f(3,2) = 10 \\ f(2,2) = 6 \end{array} \right. \Longrightarrow$ El valor máximo será de 16 y se alcanza en el punto $A(4,0)$ y el valor mínimo será de 0 y se alcanza en el punto $O(0,0)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$$

a) Determine el valor de del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = -1$ de la función $f(x)$ sea un máximo relativo.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ para $a = 1$.

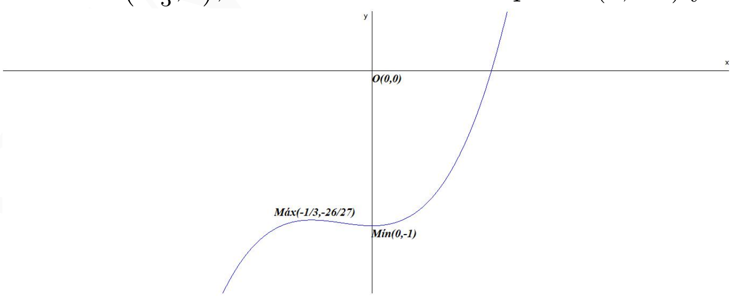
Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 2ax \Longrightarrow f'(-1) = 6 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 3$
$f''(x) = 12x + 2a \Longrightarrow f''(-1) = -12 + 6 = -6 < 0 \Longrightarrow x = -1$ es un máximo relativo.

b) Si $a = 1 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 + x^2 - 1 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -\dfrac{1}{3}$.

	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (0, \infty)$, y decreciente en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, tiene un mínimo en el punto $(0, -1)$ y un máximo en $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{26}{27}\right)$.



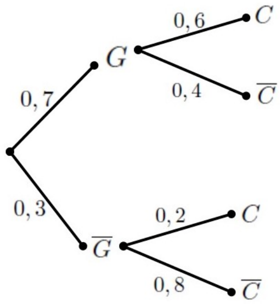
Problema 4 *(2 puntos)* En un festival de circo de verano el 70 % de los espectáculos son gratuitos y el resto de pago. El 60 % de los espectáculos gratuitos se realizan en las calles, mientras que de los de pago sólo se realizan en la calle el 20 %. Si un visitante del festival, elegido al azar, decide ir a un espectáculo, calcule la probabilidad de que:

a) El espectáculo sea gratuito y no se realice en la calle.

b) El espectáculo se realice en la calle.

Solución:

G : espectáculos gratuitos, $\overline{G}$: espectáculos de pago, C : espectáculos en las calles y $\overline{C}$: espectáculos en interiores.



a) $P(G \cap \overline{C}) = P(\overline{C}|G)P(G) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$

b) $P(C) = P(C|G)P(G) + P(C|\overline{G})P(\overline{G}) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,48$

Problema 5 *(2 puntos)* El salario medio bruto mensual en España en 2019 se puede aproximar por una distribución normal con $\sigma = 900$ euros.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, $\overline{X}$, sea a lo sumo de 200 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Suponga que $\mu = 1889$ euros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 64 individuos, la media muestral, $\overline{X}$, sea mayor que 1900 euros.

Solución:

$$N(\mu; 900)$$

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 200$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{900}{\sqrt{n}} = 200 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 900}{200}\right)^2 = 77,7924$$

Luego $n = 78$.

b) $\mu = 1889$ y $n = 64$ $P(\overline{X} > 1900) = P\left(Z > \frac{1900 - 1889}{900/\sqrt{64}}\right) = P(Z > 0,1) = 1 - P(Z < 0,1) = 1 - 0,5398 = 0,4602$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coincidente 2020) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considere el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + 2y + z = 2a \\ 2x + ay + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{array}\right.$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 4 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 2$$

- Si $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{11}{4} \\ \\ y = -\dfrac{7}{2} \\ \\ z = -\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real:

$$f(x) = ax^3 - x^2 - x + a$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que haya un punto de inflexión en $x = 1$.

b) Para $a = 2$, calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = 3ax^2 - 2x - 1 \Longrightarrow f''(x) = 6ax - 2$, $f''(1) = 6a - 2 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{3}$

b) $a = 2 \Longrightarrow f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$. La función no tiene puntos de corte con el eje de abcisas en el intervalo $[0, 1]$, luego:

$$S = \int_0^1 (2x^3 - x^2 - x + 2)\, dx = \left.\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{5}{3}\ u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & \text{si} \quad x > 1 \\ \\ -x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x)$. ¿Es la función $f(x)$ continua en todo su dominio?.

b) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (-x^2) = -1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{2x - 4}{2x} = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 1} f(x) = -1$$

Y como $f(1) = -1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1$.

b) La rama $x \le 1$ no tiene asíntotas, estudiamos la rama $x > 1$:

- Verticales: Las únicas posibles son $x = 1$ (por el apartado anterior no lo es) y $x = -1$ no está en la rama, luego no hay asíntotas verticales.
- Horizontales: $y = 1$.
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = 1$$
- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

Problema 4 *(2 puntos)* En un kiosco de prensa del aeropuerto de Madrid el 40 % de las ventas son periódicos y el resto revistas. Un 90 % de las publicaciones están en castellano. Además se sabe que un 8 % del total de las publicaciones son revistas en otro idioma. Calcule la probabilidad de que una publicación elegida al azar:

a) Sea un periódico, dado que está publicado en otro idioma distinto del castellano.

b) Sea un periódico o esté publicado en otro idioma distinto del castellano.

Solución:
Pe: periódico, R: revista, C: castellano y $\overline{C}$: otra lengua.

	Pe	R	Total
C			$0,9$
$\overline{C}$		$0,08$	
Total	$0,4$		1

$\Longrightarrow$

	Pe	R	Total
C	$0,38$	$0,52$	$0,9$
$\overline{C}$	$0,02$	$0,08$	$0,1$
Total	$0,4$	$0,6$	1

a) $P(Pe|\overline{C}) = \dfrac{P(Pe\cap\overline{C})}{\overline{C}} = \dfrac{0,02}{0,1} = 0,2$

b) $P(Pe\cup\overline{C}) = P(Pe) + P(\overline{C}) - P(Pe\cap\overline{C}) = 0,4 + 0,1 - 0,02 = 0,48$

Problema 5 *(2 puntos)* Se estima que el coste medio anual de la cesta de la compra de una familia tipo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 500$.

a) Se ha analizado el consumo de 100 familias tipo, obteniéndose un coste medio estimado de 5100 euros anuales. Calcule un intervalo de confianza al 90 % para la media μ.

b) A partir de una muestra de 36 familias tipo, se ha obtenido un intervalo de confianza para μ con un error de estimación de 160 euros. Determine el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

Solución:

$$N(\mu; 500)$$

a) $n = 100$, $\overline{X} = 5100$ y $z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{500}{\sqrt{100}} = 82,25$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (5017,75; 5182,25)$$

b) $n = 36$ y $E = 160$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 160 = z_{\alpha/2}\frac{500}{\sqrt{36}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,92$$

$$P(Z < 1,92) = 0,9726 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,0548 \Longrightarrow 1 - \alpha = 0,9452$$

$$NC = 94,52\,\%$$