

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Modelo 2020)
Selectividad-Opción A**
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcule los valores de a y de b para que se verifique $A^2 = 2I$.
b) Para $a = 0$ y $b = 2$, determine la matriz X tal que $XA = B - X$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\begin{pmatrix} a^2 + b & a + 2 \\ ab + 2b & b + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\begin{cases} a^2 + b = 2 \\ a + 2 = 0 \\ ab + 2b = 0 \\ b + 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{b) } XA = B - X \Rightarrow XA + X = B \Rightarrow X(A + I) = B \Rightarrow X = B(A + I)^{-1}$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = B(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x + a & \text{si } x < -8 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } -8 \leq x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano y $a \in \mathbb{R}$. Se pide:

- a) Proporcionar el valor del parámetro a para que la función anterior sea continua en el punto de abscisa $x = -8$ y analizar la continuidad de la función en el resto de los puntos de su dominio.

- b) Obtener la recta tangente a la función en el punto $x = e$ y estudiar el crecimiento/decrecimiento de esta recta. Justifique su respuesta.

Solución:

- a) Continuidad en $x = -8$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -8^-} (-x + a) = 8 + a \\ \lim_{x \rightarrow -8^+} \sqrt[3]{x} = -2 \end{cases} \implies 8 + a = -2 \implies a = -10$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[3]{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0 \end{cases}$$

En $x = 1$ la función es discontinua y no evitable, hay un salto concluimos que para $a = -10$ la función es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

- b) Cuando $x = e$ la rama es $f(x) = \ln x$:

$$a = e, \quad b = f(a) = f(e) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \implies m = f'(a) = \frac{1}{e} \implies$$

$$y - b = m(x - a) \implies y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \implies y = \frac{1}{e}x$$

Como la pendiente de esta recta $m = \frac{1}{e} > 0 \implies$ la recta es creciente.

Problema 3 (2 puntos) Dada la curva

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

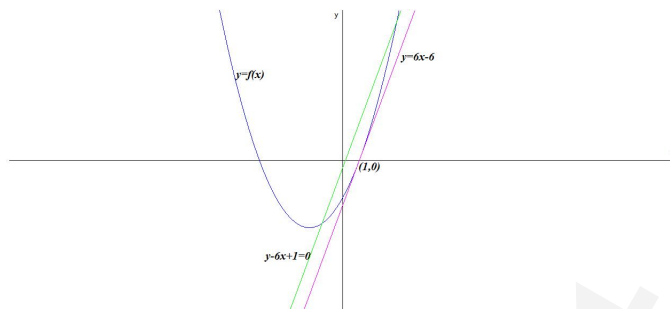
- a) Halle el punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y - 6x + 1 = 0$, indicando su abscisa y ordenada.
- b) Calcule el área del recinto acotado del plano limitado por la gráficas de $f(x)$ y $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.

Solución:

- a) $y = 6x - 1 \implies$ la pendiente de la recta es $m = 6$

$$f'(x) = 2x + 4 \text{ la pendiente de la recta es } m = f'(a) = 2a + 4 = 6 \implies a = 1 \text{ y el punto de tangencia será } (1, f(1)) = (1, 0). \text{ La recta es:}$$

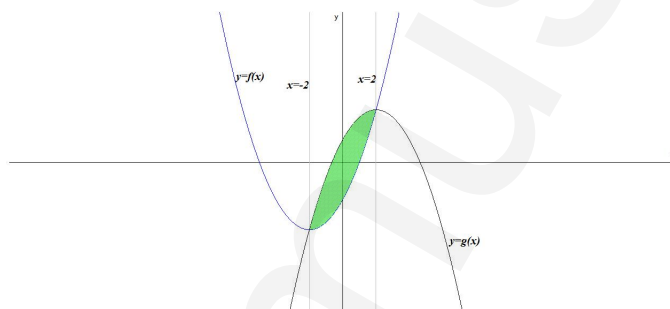
$$y - 0 = 6(x - 1) \implies y = 6x - 6$$



b) $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = -x^2 + 4x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (2x^2 - 8) dx = \frac{2x^3}{3} - 8x$$

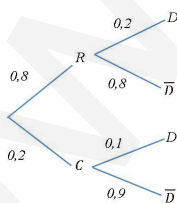
$$S_1 = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = F(2) - F(-2) = \left(\frac{16}{3} - 16 \right) - \left(-\frac{16}{3} + 16 \right) = -\frac{64}{3} \Rightarrow S = |S_1| = \frac{64}{3} u^2$$



Problema 4 (2 puntos) En una tienda en periodo de rebajas, el 80 % de las ventas son de ropa y el 20 % restante son complementos de moda. De las ventas que se realizan en la campaña, el 20 % de las ventas de ropa son devueltas, mientras que sólo se devuelven el 10 % de los complementos. Si una de las ventas es elegida al azar, calcule la probabilidad de que la venta:

- Sea una prenda de ropa y sea devuelta.
- Sea devuelta.

Solución:



a) $P(R \cap D) = P(D|R)P(R) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$

b) $P(D) = P(D|R)P(R) + P(D|C)P(C) = 0,2 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,18$

Problema 5 (2 puntos) La cantidad de principio activo en las pastillas de una determinada marca de detergente puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ mg y varianza $0,09 \text{ mg}^2$.

a) Si una muestra aleatoria simple de 400 pastillas proporcionó una cantidad media de principio activo de 13 mg, halle un intervalo de confianza al 99 % para la media poblacional.

b) Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor de 0,05 mg con un nivel de confianza del 98 %.

Solución:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = 0,09 \implies \sigma = 0,3 \implies N(\mu; 0,3)$$

a) $n = 400$, $\bar{X} = 13$ y $z_{\alpha/2} = 2,575$:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 \frac{0,3}{\sqrt{400}} = 0,038625$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (13 - 0,038625; 13 + 0,038625)$$

$$IC = (12,961375; 13,038625)$$

b) $E = 0,05$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 0,05 = 2,325 \frac{0,3}{\sqrt{n}} \implies$$

$$n \geq \left(\frac{2,325 \cdot 0,3}{0,05} \right)^2 = 194,6025 \implies n = 195$$

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Modelo 2020)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos**

Problema 1 (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Proporcione el valor de m para que $A \cdot B = C^t$

b) Para $m = 0$ calcule B^{-1} .

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } A \cdot B = C^t &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2m-1 & 0 & m+2 \\ m-1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2m-1=3 \\ m+2=4 \\ m-1=1 \end{cases} \Rightarrow \\ &m = 2 \end{aligned}$$

$$\text{b) } m = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ay + z = 6 \\ 2x - y + z = a - 1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & a-1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right); \quad |A| = -3a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

■ Si $a \neq -\frac{1}{3} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

■ Si $a = -\frac{1}{3}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -\frac{4}{3} \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) = \frac{1}{9} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 6 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ 3F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & -3 & -40 \\ 0 & 2 & 6 & 24 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{9} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & -1 & 1 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & -56 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 2x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2}$$

- a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) Halle el área del recinto acotado del plano delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, y es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$. Tiene un Máximo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ y un mínimo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -e^{-1/2}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2}}{2xe^{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\infty} = 0$$

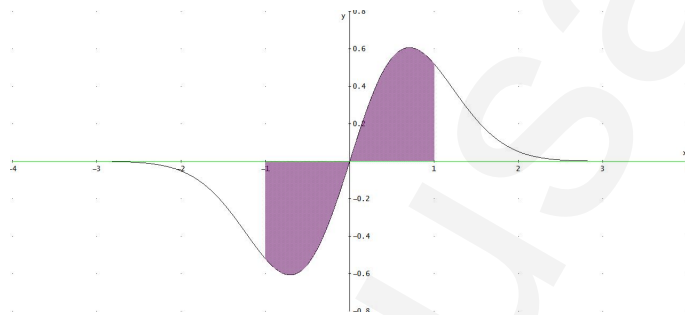
- b) La función $f(x) = \sqrt{2}xe^{-x^2} = 0 \implies x = 0$ corta al eje OX en $x = 0$ y tendremos dos recintos de integración: $[-1, 0]$ y $[0, 1]$.

$$F(x) = \int \sqrt{2}xe^{-x^2} dx = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x^2}$$

$$S_1 = \int_{-1}^0 f(x) = F(0) - F(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$S_2 = \int_0^1 f(x) = F(1) - F(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \simeq 0,894 \text{ u}^2$$



Problema 4 (2 puntos) Se lanza un dado para decidir el número de veces que se lanza una moneda.

- Obtenga la probabilidad de no observar ninguna cruz.
- Dado que no se observó ninguna cruz, ¿cuál es la probabilidad de haber lanzado la moneda 2 veces?

Solución:

Sea X el número de cruces y sea Y el número que ha salido en el dado.

$$P(Y = 1) = P(Y = 2) = P(Y = 3) = P(Y = 4) = P(Y = 5) = P(Y = 6) = \frac{1}{6}$$

-

$$P(X = 0|Y = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(X = 0|Y = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P(X = 0|Y = 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\begin{aligned}
 P(X=0|Y=4) &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\
 P(X=0|Y=5) &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\
 P(X=0|Y=6) &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\
 P(X=0) &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right) = \\
 &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right] = \frac{1}{6} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right] = 0,164
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } P(Y=2|X=0) &= \frac{P(X=0|Y=2)}{P(X=0)} = \frac{\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{6} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right]} = \frac{0,04167}{0,164} = \\
 &= 0,2541
 \end{aligned}$$

Problema 5 (2 puntos) En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 450\text{g}$.

- Si se toma una muestra de 25 sandías y se obtiene una media muestral de $\bar{X} = 2700\text{g}$, calcule un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.
- Si el peso medio de las sandías es $\mu = 3000\text{g}$, calcule la probabilidad de que el peso medio de una muestra de cuatro sandías escogidas al azar esté entre 3000 g y 3450 g.

Solución:

$$N(\mu; 450)$$

$$\text{a) } n = 25, \bar{X} = 2700 \text{ y } z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{450}{\sqrt{25}} = 176,4$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (2700 - 176,4; 2700 + 176,4) = (2523,6; 2876,4)$$

$$\text{b) } \mu = 3000 \text{ y } n = 4$$

$$P(3000 \leq X \leq 3450) = P\left(\frac{3000 - 3000}{450/\sqrt{4}} < Z < \frac{3450 - 3000}{450/\sqrt{4}}\right) =$$

$$P(0 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 0) = 0,9772 - 0,5 = 0,4772$$