Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2020

Problema 1 La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & \text{si} \quad x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.

b) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} (e^x + k) = 1 + k \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (1 - x^2) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow 1 + k = 1 \Longrightarrow k = 0$$

Si $k \neq 0$ la función es discontinua en $x = 0$.
Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} (1 - x^2) = -8 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{array} \right. \Longrightarrow$$

En $x = 3$ la función es siempre discontinua, en resumen: Si $k = 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Si $k \neq 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

b) Con $k = 0$:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x\,dx = e^x\Big]_{-1}^{0} = 1 - e^{-1}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} (1 - x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3}\bigg]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 - e^{-1} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{e} \simeq 1,3\ u^2$$

Problema 2 Dada la función

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1}$$

a) Dominio de f.

b) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = 5$?

c) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1/2\}$

b) $f(x) = 5 \Longrightarrow \dfrac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1} = 5 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \dfrac{3}{2}$

c) Asíntotas:

- Verticales: en $x = -\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \longrightarrow (-1/2)^-} \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1} = \left[\frac{4}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow (-1/2)^+} \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1} = \left[\frac{4}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1} = \infty$$

- Oblicuas:$y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x^2 + x} = 2$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1} - 2x \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x + 5}{2x + 1} = 1$$

$$y = 2x + 1$$

d) $f'(x)=\dfrac{2(4x^2+4x-3)}{(2x+1)^2}=0\Longrightarrow x=-\dfrac{3}{2}$ y $x=\dfrac{1}{2}$

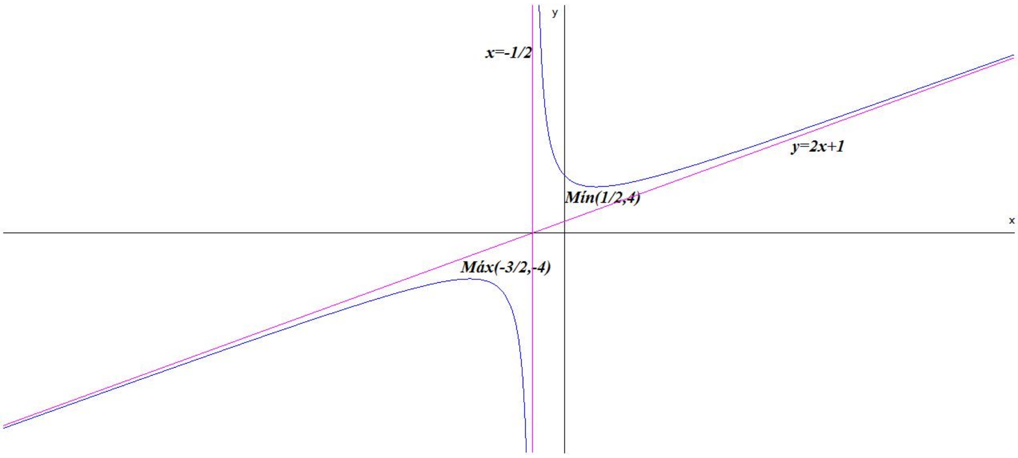
	$(-\infty,-3/2)$	$(-3/2,1/2)$	$(1/2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función f crece en el intervalo $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$.

La función f decrece en el intervalo $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

La función f tiene un máximo en el punto $\left(-\dfrac{3}{2},-4\right)$.

La función f tiene un mínimo en el punto $\left(\dfrac{1}{2},4\right)$.



Problema 3 Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+a & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad 1\le x\le 3 \\ x+b & \text{si} \quad x\ge 3\end{cases}$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Hallar $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$

Solución:

a) Continuidad en $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}(x+a)=1+a \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^+}(x^2-2)=-1 \end{array}\right. \Longrightarrow 1+a=-1\Longrightarrow a=-2$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} (x^2 - 2) = 7 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} (x + b) = 3 + b \end{array}\right. \Longrightarrow 7 = 3 + b \Longrightarrow b = 4$$

b) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^2 - 2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x\right]_1^3 = \frac{14}{3}$

Problema 4 El precio de una llamada a una línea de pago se descompone en dos conceptos: el establecimiento de llamada (precio fijo) más un coste variable en función de la duración. El coste del establecimiento de llamada es de 1 euro y el coste variable es de 1,2 euros por cada minuto hablado durante los primeros 30 minutos (inclusive), pasando a tarifar los minutos restantes a partir de ese momento a 0,8 euros por minuto.

a) Si $f(x)$ representa el coste total en euros de la llamada en función de la duración en minutos de la misma (x), obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 30$.

b) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una llamada ha sido de 45 euros, ¿cuánto ha durado la llamada?

Solución:

a)
$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 1 + 1,2x & \text{si} & 0 \le x \le 30 \\ 37 + 0,8(x - 30) & \text{si} & x > 30 \end{array}\right.$$

Continuidad en $x = 30$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow 30^-} (1 + 1,2x) = 37$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 30^+} (37 + 0,8(x - 30)) = 37$ y $f(30) = 37$

Luego la función es continua en $x = 30$.

b) $37 + 0,8(x - 30) = 45 \Longrightarrow x = 40$ minutos.