# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

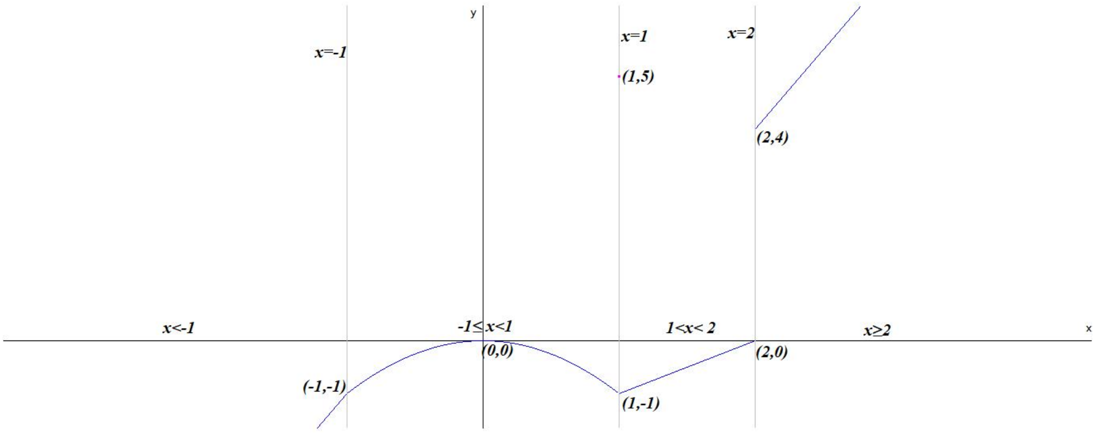
**Febrero 2020**

**Problema 1** Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 5 & \text{si} \quad x = 1 \\ x-2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 3x-2 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.

**Solución:**




En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable(salto), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

**Problema 2** Calcular $a$ y $b$ para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 5x^2 + bx - 3a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

**Solución:**

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (ax^2 - 3bx + 1) = a - 3b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (5x^2 + bx - 3a) = 5 + b - 3a$$

$$a-3b+1=5+b-3a \Longrightarrow a-b=1$$

Derivabilidad en $x=1$:

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} 2ax-3b & \text{si} & x<1 \\ 10x+b & \text{si} & x\geq 1 \end{array}\right.$$

$$f'(1^-)=2a-3b;\ \ f'(1^+)=10+b \Longrightarrow 2a-3b=10+b \Longrightarrow a-2b=5$$

$$\left\{\begin{array}{l} a-b=1 \\ a-2b=5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-3 \\ b=-4 \end{array}\right.$$

**Problema 3** Calcular $a$ y $b$ para que la función siguiente sea continua en $x=-1$ y en $x=1$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} \frac{x-a}{2} & \text{si} & x<-1 \\ bx+2 & \text{si} & -1\leq x<1 \\ \frac{ax+2b}{3} & \text{si} & x\geq 1 \end{array}\right.$$

**Solución:**

Continuidad en $x=-1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-}\dfrac{x-a}{2}=\dfrac{-1-a}{2} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}(bx+2)=-b+2 \end{array}\right. \Longrightarrow \dfrac{-1-a}{2}=-b+2 \Longrightarrow a-2b=-5$$

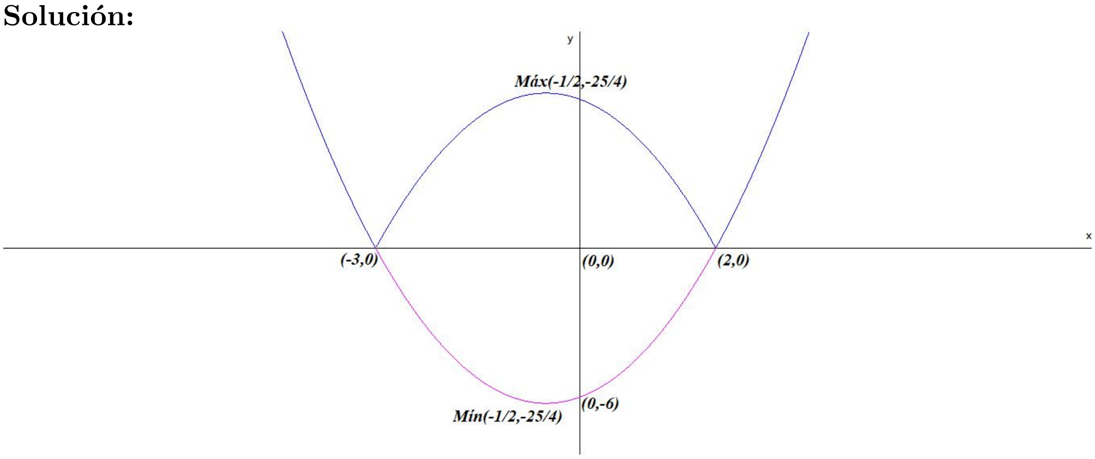
Continuidad en $x=1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(bx+2)=b+2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{ax+2b}{3}=\dfrac{a+2b}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow \dfrac{a+2b}{3}=b+2 \Longrightarrow a-b=6$$

$$\left\{\begin{array}{l} a-2b=-5 \\ a-b=6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=17 \\ b=11 \end{array}\right.$$

**Problema 4** Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x)=|x^2+x-6|$ y representarla gráficamente.

**Solución:**



Hacemos $g(x) = x^2 + x - 6 \Longrightarrow g'(x) = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $0$ | $-6$ |
| $-3$ | $0$ |
| $2$ | $0$ |
| $-1/2$ | $-25/4$ |

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 + x - 6 & \text{si} & x \le -3 \\ -(x^2 + x - 6) & \text{si} & -3 < x \le 2 \\ x^2 + x - 6 & \text{si} & 2 \le x \end{array} \right.$$

f es continua en $x = -3$:

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^-} (x^2 + x - 6) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -3^+} (-x^2 - x + 6) = 0$$

$$f(-3) = 0$$

y $f$ es continua en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (-x^2 - x + 6) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} (x^2 + x - 6) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 1 & \text{si} & x \le -3 \\ -2x - 1 & \text{si} & -3 < x \le 2 \\ 2x + 1 & \text{si} & 2 \le x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -3$: $f'(-3^-) = -5$ y $f'(-3^+) = 5$, luego no es derivable en $x = -3$.
Derivabilidad en $x = 2$: $f'(2^-) = -5$ y $f'(2^+) = 5$, luego no es derivable en $x = 5$.

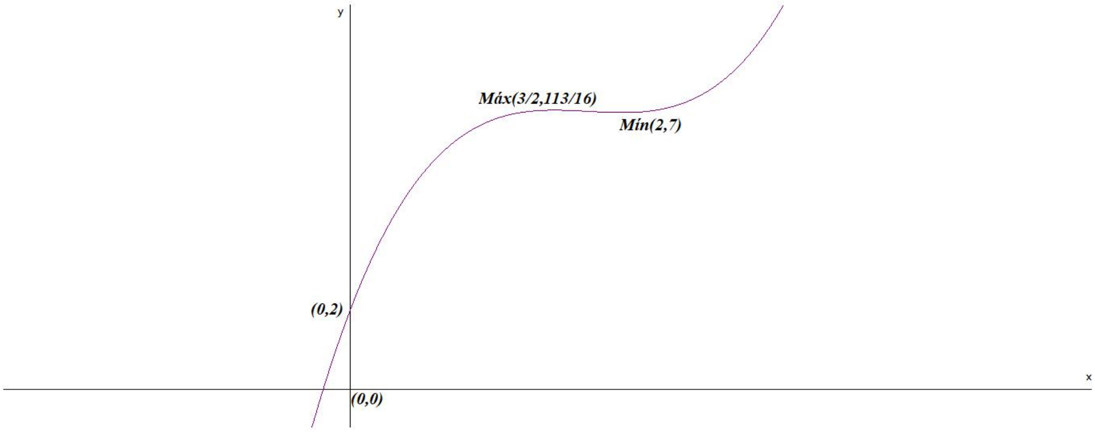
Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$.

**Problema 5** Dada la función $f(x) = x^3 - 4ax^2 + bx + c$, encontrar los valores de $a$, $b$ y $c$ sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 7)$. Decidir de que extremo se trata.
**Solución:**

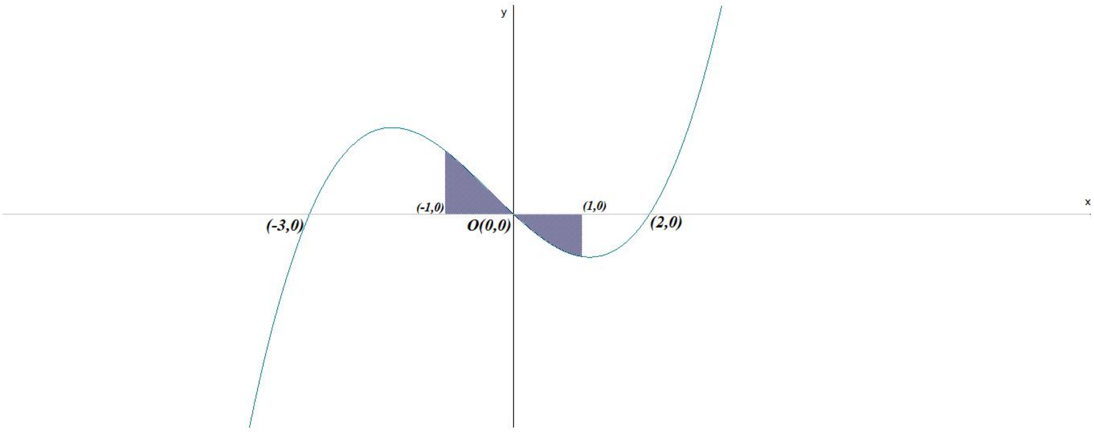
$$f(x) = x^3 - 4ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 8ax + b$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \Longrightarrow -c = 2 \\ f(2) = 7 \Longrightarrow -16a + 2b - c + 8 = 7 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow -16a + b + 12 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 21/16 \\ b = 9 \\ c = -2 \end{cases}$$

La función pedida es: $f(x) = x^3 - \frac{21}{4}x^2 + 9x - 2$
$f'(x) = 3x^2 - \frac{21}{2}x + 9$ y $f''(x) = 6x - \frac{21}{2} = \frac{3}{2} > 0 \Longrightarrow x = 2$ es un mínimo.




**Problema 6** Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$, encontrar el área encerrada por ella, el eje $OX$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
**Solución:**




$$x^3 + x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = -3 \text{ y } x = 2$$

Tendremos dos áreas a calcular $S_1$ con los límites de integración entre -1 y

0, y otra $S_2$ entre 0 y 1.

$$F(x) = \int (x^3 + x^2 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3x^2$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-1) = \frac{37}{12},\ \ S_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = F(1) - F(0) = -\frac{29}{12}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{37}{12} + \frac{29}{12} = \frac{11}{2}\ u^2$$