Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2019

Problema 1 *(2 puntos)* Si $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$

1. Calcula el determinante de A.

2. ¿Para qué valores de a tiene inversa la matriz A?.

3. La matriz A es la matriz de un sistema homogéneo (los términos independientes son todos 0) de tres ecuaciones con tres incógnitas (x, y, z). Resuélvelo en el caso en el que $a = 0$.

(Junio 2018 (La Rioja))
Solución:

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}; \quad |A| = -a^2(a+1)$$

2. $|A| = -a^2(a+1) = 0 \Longrightarrow a = -1,\ a = 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Tenemos que es un sistema homogéneo y además $|A| = 0$ con el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 <$ nº de incógnitas y, por tanto, es un sistema compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Alba, Blanca y Naia deben repartirse una herencia. Alba debe recibir la media de lo que reciban Blanca y Naia más 3000 euros; Blanca debe recibir la media de lo que reciban Alba y Naia, y Naia debe recibir la media de lo que reciban Alba y Blanca menos 3000 euros.

1. ¿Cuánto dinero debe recibir Alba más que Blanca?

2. Si la herencia fuesé de 99000 euros, ¿Cuánto dinéro debe recibír cada una?

(Junio 2018 (La Rioja))

Solución:
Sean x: dinero que recibe Alba, y: dinero que recibe Blanca y z: dinero que recibe Naia.

1. $$\begin{cases} x = \dfrac{y+z}{2} + 3000 \\ \\ y = \dfrac{x+z}{2} \\ \\ z = \dfrac{x+y}{2} - 3000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 6000 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 6000 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 6000 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 6000 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 6000 \\ 0 & -3 & 3 & -6000 \\ 0 & 3 & -3 & 6000 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 6000 \\ 0 & -3 & 3 & -6000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego el sistema es compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 6000 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2000 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2000 + \lambda \end{cases}$$

Alba va a recibir 2000 euros más que Blanca

2. $$\begin{cases} 2x - y - z = 6000 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 99000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 35000 \\ y = 33000 \\ z = 31000 \end{cases}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calcule A^{-1}.
2. Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$.
3. Calcule el valor del parámetro a para que $A + B + C = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

(Junio 2018 (Extremadura))

Solución:

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $B + C = A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow a - 1 = -1 \Longrightarrow a = 0$$

3. $A + B + C = 3I$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = 0$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes preguntas.

1. Calcule $A^2 - B^2$.
2. Calcule $(A - B)(A + B)$
3. Calcule $C^{-1}C^t - I$.

(Julio 2018 (Navarra))

Solución:

1. $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

2. $(A - B)(A + B) =$

$$\left(\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$$

3. $C^{-1}C^t - I =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 5 *(2 puntos)* Sea la expresión matricial $B^t - AX = B$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Despeje la matriz X.
2. Calcule la matriz X.

(Junio 2018 (Navarra))

Solución:

1. $B^t - AX = B \Longrightarrow AX = B^t - B \Longrightarrow X = A^{-1}(B^t - B)$
2. $X = A^{-1}(B^t - B) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$