

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Noviembre 2019

Problema 1 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro real m :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + my - z = 0 \\ x - y - mz = 0 \end{cases}$$

1. Determinénse los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x = y = z = 0$.
2. Resuélvase para $m = 1$.

(Junio 2018 (Madrid))

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo.

1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -m \end{pmatrix}; \quad |A| = m^2 - 1 = 0 \implies m = \pm 1$$

- Si $m \neq \pm 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única, la trivial $x = y = z = 0$)
 - Si $m = \pm 1$ se trata de un sistema compatible indeterminado. Un sistema homogéneo no puede ser incompatible.
2. Si $m = 1$ la primera y la segunda ecuación son iguales cambiadas de signo, eliminamos una de ellas y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

1. Determinar para qué valor del parámetro x no existe $(A \cdot B)^{-1}$.

2. Hallar la matriz inversa de $A \cdot B$ para $x = 1$.

(Junio 2018 (Extremadura))

Solución:

$$1. A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & 3 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A \cdot B| =$$

$$5x+1=0 \Rightarrow x=-1/5 \Rightarrow \nexists (A \cdot B)^{-1} \text{ si } x=-1/5.$$

2. Si $x = 1$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos) Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

1. Calcula el determinante de A .
2. Comprueba que A es una matriz ortogonal.
3. Resuelve el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Julio 2018 (Valencia))

Solución:

$$1. |A| = 1$$

$$2. A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = A^t$$

$$3. |A| = 3 - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow \nexists A^{-1} \text{ para } b = \frac{3}{2}.$$

4.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Calcular $(A \cdot B)^{-1}$.
2. Calcular $AB^t - A^tB$.
3. Calcular $B^tX + A^tB = A^t$.
Siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B , respectivamente.

(Junio 2018 (Valencia))

Solución:

$$1. (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$2. AB^t - A^tB =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3. B^tX + A^tB = A^t \implies B^tX = A^t - A^tB = A^t(I - B) \implies$$

$$X = (B^t)^{-1}A^t(I - B) \implies$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \implies$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -17/2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 5 (2 puntos) Alba, Blanca y Naia son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la temporada recién finalizada, han marcado 65 goles. Sabemos que Alba ha marcado 50 % más goles que Blanca, y que Naia ha marcado la mitad de goles que Alba. ¿Cuántos goles ha marcado cada una?

(Julio 2018 (La Rioja))

Solución:

Sean x : nº de goles que marcó Alba, y : nº de goles que marcó Blanca y z : nº de goles que marcó Naia.

$$\begin{cases} x + y + z = 65 \\ x = 1,5y \\ z = x/2 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 65 \\ 2x - 3y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \\ z = 15 \end{cases}$$