Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2019

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x+ay+2z=2 \end{cases}$$

1. Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

2. Resuélvase el sistema en el caso $a=-1$.

(Junio 2018 (Castilla León))
Solución:

1. $$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & a & 2 & 2 \end{array}\right); \quad |A|=6a-19=0 \Longrightarrow a=\frac{19}{6}$$

   - Si $a\neq 19/6 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
   - Si $a=19/6$:

   $$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & 19/6 & 2 & 2 \end{array}\right); \ |A|=0, \ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\neq 0 \Longrightarrow$$

   $$\text{Rango}(A)=2$$

   $$|A_3|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=20\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

   Luego el sistema, en este caso, es Incompatible.

2. Si $a=-1$:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2/5 \\ y=4/5 \\ z=4/5 \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Resuelve las siguientes cuestiones:

1. Se considera la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule los valores de a y b verifiquen la igualdad $M^2 + aM + bI = O$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y O es la matriz nula de orden 2.

2. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Encontrar todas las matrices B que conmuten con la matriz A, es decir, que cumplen: $AB = BA$.

(Junio 2018 (Cataluña))

Solución:

1. $M^2 + aM + bI = O$:

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a+b+2 & 5a+5 \\ 2a+2 & -a+b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

2. $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $AB = BA$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ d & c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} c = b \\ d = a-b \Longrightarrow a = b+d \\ a-c = d \Longrightarrow a = c+d = b+d \\ b-d = c-d \Longrightarrow c = b \end{cases} \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} b+d & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Sean A y B las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Hallar la matriz inversa de $A - B$.

2. Hallar la matriz X tal que $X(A-B) = 2A - 3B$.

(Julio 2018 - Opción A (País Vasco))

Solución:

1. $(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $X(A-B) = 2A - 3B \Longrightarrow X = (2A-3B)(A-B)^{-1} =$

$$\left[2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

1. Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

2. Calcular las matrices X e Y que verifican que:

$$\left\{\begin{array}{l} AX + BY = C \\ AX = Y \end{array}\right.$$

(Junio 2018 - Opción A (País Vasco))

Solución:

1. $(I+B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$

2. $Y + BY = C \Longrightarrow (I+B)Y = C \Longrightarrow Y = (I+B)^{-1}C \Longrightarrow$

$$Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$AX = Y \Longrightarrow X = A^{-1}Y \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 11/2 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 5 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

1. Hallar el valor de b para el que no exista la matriz inversa de A.

2. Para $b = 1$, hallar la matriz X que verifique $AX = A^3 - I$.

(Julio 2018 - Opción A (Extremadura))

Solución:

1. $|A| = 3 - 2b = 0 \Longrightarrow b = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow \nexists A^{-1}$ para $b = \dfrac{3}{2}$.

2. Si $b = 1$: $AX = A^3 - I \Longrightarrow X = A^{-1}(A^3 - I) \Longrightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{3} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 30 & 20 & 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$