# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

**Noviembre 2019**

**Problema 1** *(2 puntos)* Se considera la siguiente matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & x+2 & x^2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$ se pide:

1. Resolver la ecuación $|A| = 0$. (Donde $|A|$ es el determinante de $A$)
2. Si $x = 0$ existe el determinante de $A$. ¿Por qué?
3. Si $x = 2$ existe el determinante de $A$. ¿Por qué? En caso afirmativo resolver la ecuación $AZ = I$ donde $I$ es la matriz identidad de orden 3.

(Junio 2018 (Islas Baleares))
**Solución:**

1. $|A| = -4x^2 - 8x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -2$
2. Si $x = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$
3. Si $x = 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$
   $AZ = I \Longrightarrow A^{-1}Z = A^{-1}I \Longrightarrow Z = A^{-1}$
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & -1 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

**Problema 2** *(2,5 puntos)* En un centro educativo se imparten enseñanzas de ESO, Bachillerato y Ciclos Formativos. Si sumamos el 20 % del alumnado de ESO, con el 20 % del alumnado de Bachillerato y el 40 % del alumnado de Ciclos Formativos se obtienen 42 alumnos más que el 20 % del alumnado total del centro. Asimismo si sumamos el número de alumnos de ESO más la mitad de los de Ciclos Formativos obtenemos 40 alumnos menos que el total de matriculados en Bachillerato. Si el centro tiene en total 1115 alumnos.

1. Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.
2. Hallar el número de matriculados en cada tipo de enseñanza.

(Julio 2018 (Islas Canarias))
**Solución:**

1. LLamamos $x$ al nº de alumnos de ESO, $y$ al nº de alumnos de Bachillerato y $z$ al nº de alumnos de Ciclos Formativos.
$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1115 \\ 2x+2y+4z=2650 \\ 2x+z=2y-80 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=1115 \\ x+y+2z=1325 \\ 2x-2y+z=-80 \end{array}\right.$$

2. $x=380$, $y=525$ y $z=210$

**Problema 3** *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y-(1-a^2)z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{array}\right.$$

Calcula razonadamente los valores del parámetro $a$ para que el sistema tenga soluciones distintas de la solución trivial $(0,0,0)$.
(Julio 2014 - Opción A (Castilla León))
**Solución:**
Se trata de un sistema Homogéneo

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -(1-a^2) \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=2(a^2-9)=0 \Longrightarrow a=\pm 3$$

Si $a \neq \pm 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución trivial $x=y=z=0$)

Si $a=\pm 3 \Longrightarrow |A|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=2$ <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

**Problema 4** *(2 puntos)* Dadas las matrices $A=\left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 4 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$,
$C=\left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$ y $D=\left(\begin{array}{cc} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{array}\right)$

1. Calcula $A \cdot B - C^T$.

2. Comprueba que la matriz $C$ no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2B$ no puede ser realizado.

(Julio 2018 (Castilla La Mancha))

**Solución:**

1. $A\cdot B-C^T=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&2\\2&-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&3&15\\4&3&8\\6&6&16\end{pmatrix}$

2. $|C|=0\Longrightarrow\nexists C^{-1}$. La dimensión de la matriz $D^2$ es $2\times 2$ y la dimensión de la matriz $B$ es $1\times 3$, el número de columnas de $D^2$ no coincide con el número de filas de $B$, luego no se pueden multiplicar.

**Problema 5** *(2 puntos)* Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&5\\a&b\end{pmatrix}$, encontrar los valores de los parámetros $a$ y $b$ para que las matrices conmuten.

(Junio 2018 (Castilla La Mancha))

**Solución:**

$$AB=BA$$

:

$$\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1+3a&5+3b\\3+a&15+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&8\\a+3b&3a+b\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}1+3a=16\\5+3b=8\\3+a=a+3b\\15+b=3a+b\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=5\\b=1\end{array}\right.\Longrightarrow B=\begin{pmatrix}1&5\\5&1\end{pmatrix}$$