Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2019

Problema 1 *(2 puntos)* Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

(Julio 2018 (Aragón))

Solución:

Sean x: nº de habitaciones dobles, y: nº de habitaciones individuales y z: nº de habitaciones familiares

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=144 \\ x=3(y+z) \\ 2x+y+4z=312 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=144 \\ x-3y-3z=0 \\ 2x+y+4z=312 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=108 \\ y=16 \\ z=20 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

1. ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB=C$?
2. Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

(Junio 2018 (Aragón))

Solución:

1. $AB=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x-2y-1 & x-4y \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2x-2y-1 & x-4y \\ -9 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x-2y-1=2 \\ x-4y=-3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-9/5 \\ y=3/10 \end{array}\right.$$

2. $C^{-1}=\begin{pmatrix} -4/19 & -3/19 \\ -9/19 & -2/19 \end{pmatrix}$

Problema 3 *(2 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Si $A^3B+C = A^2D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

2. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

(Junio 2018 (Asturias))

Solución:

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$$A^3B + C = A^2D \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4x+3y \\ -3x-2y+my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 4x+3y = 7 \\ 3x+(2-m)y = 4 \end{cases}$$

2. $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 7 \\ 3 & 2-m & 4 \end{array}\right)$ y $|A| = -4m - 1 = 0 \Longrightarrow m = -\dfrac{1}{4}$.
Si $m \neq -1/4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
Si $m = -1/4$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 7 \\ 3 & 9/4 & 4 \end{array}\right)$ y $|A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$
$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$. Luego el sistema sería incompatible.
Si $m = 1$:

$$\begin{cases} 4x+3y = 7 \\ 3x+y = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sea considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$

1. Calcula el valor de x que cumple $A^2 = 2A$.

2. Para $x = -1$ calcular A^{-1} y comprobar el resultado multiplicando las matrices A por A^{-1}.

(Junio 2018 (Islas Baleares))

Solución:

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & x(x+4) \\ 0 & (x+2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2(x+2) \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x(x+4) = 2x \\ (x+2)^2 = 2x+4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+2x = 0 \\ x^2+2x = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 0, \ \ x = -2$$

2. Si $x = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 5 *(2 puntos)* Un instituto tiene tres partidas presupuestarias para libros, material de oficina y muebles. El presupuesto para muebles es cinco veces la suma de los presupuestos de libros y material de oficina. El presupuesto para libros es el triple del presupuesto de material de oficina. La suma de los presupuestos de muebles y material de oficina es 7 veces el presupuesto para libros.

1. ¿Con los datos anteriores podemos saber las cantidades presupuestadas de cada partida?

2. Determinar las cantidades presupuestadas sabiendo que el presupuesto para los libros es de 2100 euros.

(Julio 2018 (Islas Baleares))

Solución:

Sean x: cantidad presupuestada para libros, y: cantidad presupuestada para material de oficina y z: cantidad presupuestada para muebles.

$$\begin{cases} z = 5(x+y) \\ x = 3y \\ y+z = 7x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5x+5y-z = 0 \\ x-3y = 0 \\ 7x-y-z = 0 \end{cases}$$

1. No podemos saber el dinero presupuestado en cada partida. Se trata de un sistema homogéneo cuya matriz asociada tiene determinante igual a cero y el sistema sería compatible indeterminado con infinitas soluciones posibles.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A| = 0 \Longrightarrow SCI$$

2. Si $x = 2100$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 5y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \dfrac{2}{3}\lambda \\ \\ y = \dfrac{20}{3}\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2100 \\ y = 700 \\ z = 14000 \end{array} \right.$$