

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Octubre 2019

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & -1 \\ m & -1 & m \\ 10 & 9 & m \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix} = -m^3 + 9m^2 - 9m - 10 = 0 \implies m = 2, \quad m = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$$

$$\text{Si } m = 2 \text{ o } m = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}.$$

$$\text{Si } m \neq 2 \text{ y } m \neq \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 10 & 9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1000 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b & b \\ -c+d & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -a = -a + b \implies b = 0 \\ -b = b \implies b = 0 \\ a + c = -c + d \implies d = a + 2c \\ b + d = d \implies b = 0 \end{cases}$$

$$\text{Luego } X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a + 2c \end{pmatrix}.$$