Examen de Matemáticas II (Extraordinaria 2020)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1,1,1,1)$ y $(1,2,3,4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) (0,5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

b) (0,5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.

c) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

e) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Solución:

Tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{pmatrix}$ con $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ y $d\neq 0$.

a) Hacemos $F_3=5F_1-F_2\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

b) Hacemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$ con $|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 2\end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow$ las tres filas son linealmente independientes.

c) Tomamos la matriz anterior y tenemos:
$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 2 & 2\end{array}\right)$ $|A_1|=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A_1)=3=\text{Rango}(A)=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible determinado.

d) Tomamos la matriz del primer apartado: (Por Gauss)

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-3F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2 & -3\end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

e) A la matriz anterior le cambiamos el último valor de la tercera fila: (Por Gauss)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si} \quad x<1, \ x\neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$,

se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f\circ f)(0)$.

b) (1,25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

c) (0,75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

Solución:

.

a) Si $x<1$ y $x\neq -1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1} \Longrightarrow f(0)=1$ y $(f\circ f)(x) = f(f(0)) = f(1) = \dfrac{1}{2}$.

b) Continuidad en $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

Luego la función es continua en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x < 1, \ x \neq -1 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{4x^2} & \text{si} \qquad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = -\frac{1}{4}, \ \ f'(1^+) = 0 \Longrightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Longrightarrow$$

f no es derivable en $x = 1$.
La función es continua en $x = 1$ y en ese punto la función pasa de decrecer a crecer, luego hay un mínimo local en ese punto.

c) Asíntotas:
En la rama $x < 1$:

- Verticales: la única posible es en $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \quad \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: en $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

En la rama $x \geq 1$:

- Verticales: No hay.
- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{4x} = +\infty$$

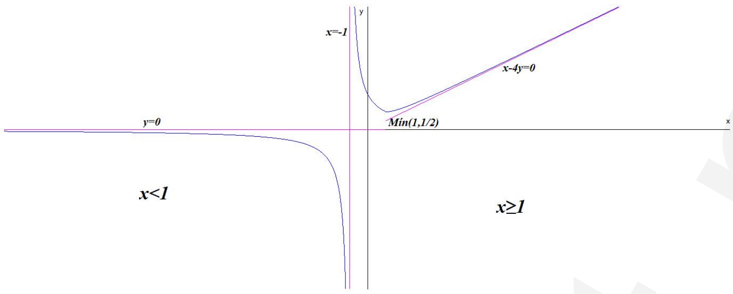
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{4x} - \frac{x}{4}\right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{4x} = 0$$

$$y = \frac{1}{4}x \Longrightarrow x - 4y = 0$$

.



Problema 3 *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

c) (0,75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

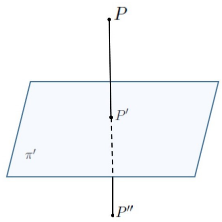
Solución:
Tenemos $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ P_r(2,0,-1) \end{cases}$

a) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{P_rP} = (1,3,1) \\ P(3,3,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

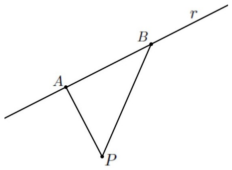
$$\pi : x + y - 4z - 6 = 0$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi' \perp r / P \in \pi'$:
$\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \Longrightarrow \pi' : -x + y + \lambda = 0$
$P \in \pi' \Longrightarrow -3 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow \pi' : -x + y = 0$
- Calculamos el punto P' de corte de π' con r. Para ello pasamos la ecuación de la recta r a paramétricas y sustituimos en el plano.
$r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Longrightarrow -(2-\lambda)+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$. Y sustituyendo en r tenemos $P'(1,1,-1)$
- Ahora tenemos que P' es el punto medio entre P y su simétrico P'': $\dfrac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = (2,2,-2) - (3,3,0) \Longrightarrow$
$P''(-1,-1,-2)$



c) Como A y B están en la recta r podemos poner de forma general $A(2-\lambda, \lambda, -1)$ y $B(2-\mu, \mu, -1)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (\lambda - \mu)(1, -1, 0)$.



Tenemos que el vector $\overrightarrow{AP} = (3,3,0) - (2-\lambda, \lambda, -1) = (1+\lambda, 3-\lambda, 1)$
Como el ángulo recto se encuentra en el vértice A tenemos que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP} \Longrightarrow (1,-1,0)\cdot(1+\lambda, 3-\lambda, 1) = 0 \Longrightarrow 1+\lambda-3+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow A(1,1,-1)$, el vector $\overrightarrow{AP} = (2,2,1)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (1-\mu)(1,-1,0)$.
El área sería:

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right| = \frac{1}{2}|(1-\mu)\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(1-\mu)(1,1,-4)| =$$

$$\frac{1}{2}|1-\mu|\sqrt{18} = \frac{3\sqrt{2}}{2}|1-\mu| = \frac{3}{\sqrt{2}} \Longrightarrow |1-\mu| = 1.$$

- $1-\mu = 1 \Longrightarrow \mu = 0 \Longrightarrow B(2,0,-1)$ y $A(1,1,-1)$.
- $1-\mu = -1 \Longrightarrow \mu = 2 \Longrightarrow B(0,2,-1)$ y $A(1,1,-1)$.

Problema 4 *(2,5 puntos)* Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

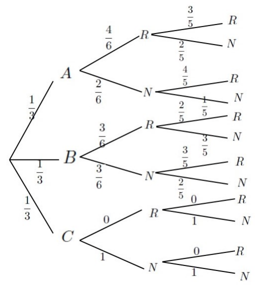
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra. que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

c) (0,5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

Solución:

Tenemos $A:\left\{\begin{array}{l} 4R \\ 2N \end{array}\right.$, $B:\left\{\begin{array}{l} 3R \\ 3N \end{array}\right.$ y $C:\left\{\begin{array}{l} 0R \\ 6N \end{array}\right.$.



a) $P(R \text{ primera}) = P(R|A)P(A)+P(R|B)P(B) = \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{1}{3}+0\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{18} = 0,389$

b) $P(RN) = P(RN|A)\cdot P(A)+P(RN|B)\cdot P(B)+P(RN|C)\cdot P(C) = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{6}\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{3}\cdot 0\cdot 1 = \dfrac{17}{90} = 0,189.$

c) $P(N2|R1) = \dfrac{P(N2|R1)}{P(R1)} = \dfrac{17/90}{7/18} = \dfrac{17}{35} = 0,486$

Examen de Matemáticas II (Extraordinaria 2020) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) (0,5 puntos) Calcular la matriz $C=A^2-2I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D=ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

a) $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $C = A^2 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $BB^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$|BB^t| = 0 \Longrightarrow |D| = |ABB^t| = |A||BB^t| = 0$

Problema 2 *(2,5 puntos)* La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) (0,5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) (0,75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) (1,25 puntos) La energáa total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

Solución:

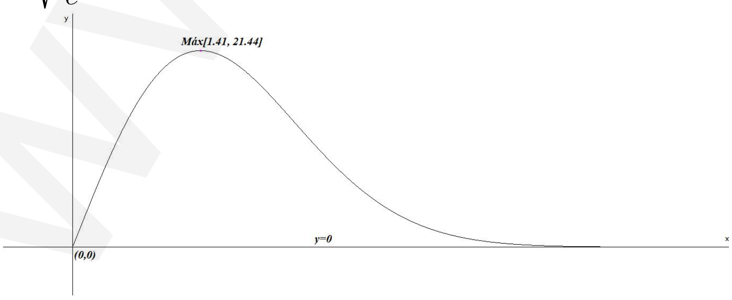
a) $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{25t}{e^{t^2/4}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{25}{\frac{t}{2}e^{t^2/4}} = 0$
La batería se agota con el tiempo.

b) $P'(t) = \dfrac{25}{2}(2-t^2)e^{-t^2/4} = 0 \Longrightarrow (2-t^2) = 0 \Longrightarrow t = \sqrt{2}$. La solución negativa no es relevante.

	$(0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},\infty)$
$P'(t)$	$+$	$-$
$P(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

$\Longrightarrow x = \sqrt{2}$ es un máximo local.

El máximo se produce a las $\sqrt{2}$ unidades de tiempo con $P(\sqrt{2}) = 25\sqrt{\dfrac{2}{e}}$ unidades de potencia.



c) $E'(t) = P(t) \Longrightarrow E(t) = \int \left(25te^{-t^2/4}\right) dt = -50e^{-t^2/4} + C$

$E(0) = 0 \Longrightarrow -50 + C = 0 \Longrightarrow C = 50 \Longrightarrow E(t) = -50e^{-t^2/4} + 50$

La función $P(t)$ no corta el eje de abcisas en el intervalo $(0, 2)$ luego $\int_0^2 \left(25te^{-t^2/4}\right) dt = E(2) - E(0) = \dfrac{50(e-1)}{e} \simeq 31,61\ u^2$

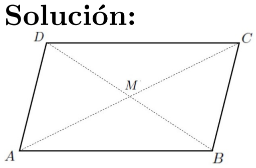
Problema 3 *(2,5 puntos)* Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución:



a) $M\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. $\overrightarrow{AC} = (3, 3, -1)$ y $\overrightarrow{BC} = (2, 2, -2)$. Tenemos: $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4(1, -1, 0)$

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 0) \\ P_r = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \lambda \\ y = \frac{3}{2} - \lambda \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

b) $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (1, 0, -1) + (2, 2, -2) = (3, 2, -3)$
Tenemos $\overrightarrow{AD} = (2, 2, -2)$ y $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}| = |-4(1, -1, 0)| = 4\sqrt{2}\ u^2$$

c)

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|} = \frac{3+3-1}{\sqrt{19}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{57}}{57} \Longrightarrow \alpha = 48^{o}31'38''$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0,4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0,08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.

b) (0,5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.

c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

Solución:

Tenemos $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$, $P(X) = 0,4$ y $P(X \cap \overline{Y}) = 0,08$

a) $P(X\cap\overline{Y}) = P(X) - P(X\cap Y) \Longrightarrow P(X\cap Y) = P(X) - P(X\cap\overline{Y}) = 0,4 - 0,08 = 0,32$
$P(X \cap Y) = P(X)P(Y) \Longrightarrow 0,32 = 0,4P(Y) \Longrightarrow P(Y) = \dfrac{0,32}{0,4} = 0,8$

b) $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0,4 + 0,8 - 0,32 = 0,88.$

c) $p = P(\overline{X}) = 1 - P(X) = 0,6$ y sea A el nº de aciertos con probabilidad p. Se trata de una distribución binomial $B(8; 0,6)$.

$$P(A \geq 2) = 1 - (P(A = 0) + P(A = 1)) =$$

$$1 - \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} 0,6^{0}\cdot 0,4^{8} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} 0,6^{1}\cdot 0,4^{7}\right] = 0,99148032$$