Examen de Matemáticas II
Selectividad-Opción A (Julio 2020)
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$; $|A| = a(a+1) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -1$.

- Si $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(A) =$ n^{o} de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD: Sistema compatible determinado, solución única.
- Si $a = -1$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) =$ $\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow SI$: sistema incompatible, no tiene solución.
- Si $a = 0$:
$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ SCI: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dadas las funciones $f(x) = x^3+3x^2-1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1,10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.

Solución:

a) Sea $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ función continua en el intervalo $[1,10]$, con $h(1) = -3 < 0$ y $h(10) = 1239 > 0$. Por el teorema de Bolzano existe un número real $c \in [1,10]$ en el que $h(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - g(c) = 0 \Longrightarrow f(c) = g(c)$.

b) $m(x) = f'(x) = 3x^2 + 6x \Longrightarrow m'(x) = 6x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$ como $m''(-1) = 6 > 0 \Longrightarrow x = -1$ es un mínimo. Tenemos $m(-1) = -3$ y $f(-1) = 1$. La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = -3(x+1) \Longrightarrow y = -3x - 2$$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+3x^2-1}{6x}\,dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \ln|x|\right)\Big]_1^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{41}{6} - \ln 2\right) \simeq$ $1,02336$.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{array} \right. \quad \text{y } s : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

Solución:

a) $r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,1,3) \\ P_r(0,-2,1) \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Longrightarrow$
$s:\begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(2,-1,1) \\ P_s(-1,-4,0) \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}=(-1,-2,-1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-11\neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) $\pi\perp r \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,3) \Longrightarrow x+y+3z+\lambda=0$ como $P(2,-1,5)\in \pi \Longrightarrow 2-1+15+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-16 \Longrightarrow \pi: x+y+3z-16=0.$

c) $\pi' \parallel r$ y $s\subset\pi' \Longrightarrow \pi':\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,1,3) \\ \overrightarrow{u_s}=(2,-1,1) \\ P_s(-1,-4,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi':\begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \pi': 4x+5y-3z+24=0$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30 %. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40 %, en el tercero del 50 % y en el cuarto del 60 %. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85 % de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución:

a) La probabilidad P_1 de que no se lance la cuarta flecha será:
P_1 = probabilidad de acertar en el primer lanzamiento + probabilidad de fallar el primer lanzamiento y acertar el segundo + probabilidad de fallar el primer lanzamiento y fallar el segundo lanzamiento y acertar el tercer lanzamiento $=0,3+0,7\cdot 0,4+0,7\cdot 0,6\cdot 0,5=0,79$

b) P_2 = probabilidad de no acierta en la primera y no acierta en la segunda y no acierta en la tercera y no acierta en la cuarta $=0,7\cdot 0,6\cdot 0,5\cdot 0,4=0,084$

c) $B(10; 0,85)$:

$$P(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0,85^6 \cdot 0,15^4 = 0,04$$

Examen de Matemáticas II
Selectividad-Opción A (Julio 2020)
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución:

Sea x el precio del kg de doradas, y el precio del kg de lubinas y z el precio del kg de rodaballos.

$$\left\{\begin{array}{l} 1374000x + 23440000y + 7400000z = 275800000 \\ 7400000z = 63600000 \\ x = 0,11 + y \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 5,7767 \text{ euros/kg} \\ y = 5,6667 \text{ euros/kg} \\ z = 8,5945 \text{ euros/kg} \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} (x-1)^2 & \text{si} & x \le 1 \\ (x-1)^3 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

Solución:

a) La función en las ramas es continua estudiamos en el punto $x = 1$:
$\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} (x-1)^3 = 0$ y $f(1) = 0 \Longrightarrow f$ es continua en $[-4, 4]$.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 0 \\ f'(1^+) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f \text{ es derivable en } [-4, 4]$$

En la rama $[-4, 1]$ tenemos $f'(x) = 2(x-1)$ es $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ en esta rama decrece la función.
En la rama $(1, 4]$ tenemos $f'(x) = 3(x-1)^2$ es $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ en esta rama crece la función.

c)

$$g(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 6(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Continuidad de g en $x = 1$:
$\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} 2(x-1) = 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} 3(x-1)^2 = 0$ y $g(1) = 0 \Longrightarrow g$ es continua en $[-4, 4]$.
Derivabilidad de g en $x = 1$: Tenemos $g'(1^-) = 2 \neq g'(1^+) = 0 \Longrightarrow g$ no es derivable en $x = 1$.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.

b) (0,5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $Q \in t$:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1, 2, -3) \\ P_t = Q(-1, 0, 1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto Q' proyección de Q sobre π en el punto de corte de t con π:

$$(-1+\lambda)+2(2\lambda)-3(1-3\lambda) = 4 \Longrightarrow \lambda = \frac{4}{7} \Longrightarrow Q'\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)$$

b) Si $\pi' \parallel \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_{\pi'}} \Longrightarrow \pi' : x+2y-3z+\lambda = 0$ como $P(-3,1,2) \in \pi' \Longrightarrow -3+2-6+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 7 \Longrightarrow \pi' : x+2y-3z+7 = 0$

c) $\pi'' \perp \pi \Longrightarrow \pi'' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,-3) \\ \overrightarrow{PQ} = (2,-1,-1) \\ P(-3,1,2) \end{array} \right. \Longrightarrow$

$$\pi'' : \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi' : x+y+z = 0$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,25$ y $P(A \cap B) = 0,125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0,5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) (0,5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ (donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\overline{B}|A)$

Solución:

a) $P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(\phi) = 0 \Longrightarrow A \cup B$ y C son incompatibles.

b) $P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 = P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0,5 + 0,25 - 0,125) = 0,375$

d) $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,5 - 0,125}{0,5} = 0,75$