Examen de Matemáticas II (Modelo 2020)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.

a) (0,5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80 %	20 %	0 %
B	70 %	20 %	10 %
C	60 %	40 %	0 %

Solución:

a) Se necesitan: de nitrógeno $2000 \cdot 0,78 = 1560$ l, de oxígeno $2000 \cdot 0,21 = 420$ l y de argón $2000 \cdot 0,01 = 20$ l.

b) Se x el nº litros de mezcla A, y el nº litros de mezcla B y z el nº litros de mezcla C.

$$\left\{\begin{array}{l} 0,8x + 0,7y + 0,6z = 1560 \\ 0,2x + 0,2y + 0,4z = 420 \\ 0,1y = 20 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1700 \\ y = 200 \\ z = 100 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $\dfrac{3}{e}$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0,5 puntos) Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 0$, $y = 1$.

Solución:

a) $f'(x) = 3e^{3x-2} \Longrightarrow m = f'(a) = 3e^{3a-2} = 3e^{-1} \Longrightarrow 3a - 2 = -1 \Longrightarrow$ $a = \dfrac{1}{3}$ luego el punto de tangencia es $\left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{e}\right)$ y la recta tangente tendrá por ecuación:

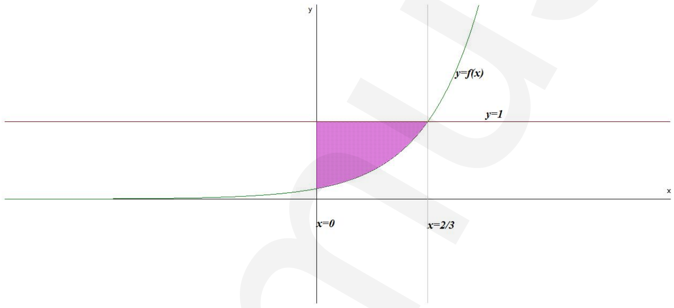
$$y - \frac{1}{e} = \frac{3}{e}\left(x - \frac{1}{3}\right) \Longrightarrow y = \frac{3}{e}x$$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2/3} \frac{1 - e^{3x-2}}{6x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 2/3} \frac{-3e^{3x-2}}{6} = -\frac{1}{2}$

c) $f(x) = 1 \Longrightarrow e^{3x-2} = 1 \Longrightarrow 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ Luego el área será:

$$S_1 = \int_0^{2/3} (f(x) - 1)\, dx = \int_0^{2/3} \left(e^{3x-2} - 1\right)\, dx = \left.\frac{e^{3x-2}}{3} - x\right]_0^{2/3} =$$

$$-\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{e}\right) \Longrightarrow S = |S_1| = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{e^2}\right)\ u^2$$



Problema 3 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas $r_1 : \left\{\begin{array}{l} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{array}\right.$ y $r_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{array}\right.$, se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

$$r_1 : \left\{\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, -3, 1) \\ P_{r_1}(-1, 2, 0) \end{array}\right.$$

$$r_2 : \left\{\begin{array}{l} x = 4 + 5\lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (5, 4, 1) \\ P_{r_2}(4, -3, 0) \end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (4, -3, 0) - (-1, 2, 0) = (5, -5, 0)$

$$[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -55 \neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}| = |(-7, 4, 19)| = \sqrt{426}$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{55}{\sqrt{426}} = \frac{55\sqrt{426}}{426}\ u$$

b) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, -3, 1) \\ \overrightarrow{OP_{r_1}} = (-1, 2, 0) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : 2x + y + z = 0$$

El punto de corte de r_2 con π será:

$$2(4 + 5\lambda) + (-3 + 4\lambda) + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow P\left(\frac{7}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A \cup B) = 0,55$, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,90$ y $P(B|A) = 0,25$. Se pide:

a) (2 puntos) Calcular $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ y $P(B|\overline{A})$.

b) (0,5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,90 \Longrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,90 = 0,10$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B|A)} = \frac{0,10}{0,25} = 0,4$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = 0,55 + 0,10 - 0,40 = 0,25$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0,25 - 0,10}{1 - 0,4} = 0,25$$

b) A y B son independientes si se cumple $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$:

$$P(A)\cdot P(B) = 0,40\cdot 0,25 = 0,10 \text{ y } P(A\cap B) = 0,10 \Longrightarrow$$

Los sucesos A y B son independientes.

Examen de Matemáticas II (Modelo 2020)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

Solución:

a) Por Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-5F_1 \\ F_3+F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3+F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Si $t = 0$ el Rango$(A) = 1$ y si $t \neq 0$ el Rango$(A) = 2$.

b) El sistema es compatible determinado si Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ =n$^{\text{o}}$ de incógnitas$= 2 \Longrightarrow t \neq 0$ por el apartado anterior. Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-5F_1 \\ F_3+F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & t & 3t+6 \end{array}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & 0 & 6t+6 \end{array}\right) \Longrightarrow 6t+6 = 0 \Longrightarrow t = -1$$

El sistema sería:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \end{cases}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$.

b) (0,75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva $y = f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^2 x f(x)\, dx$.

Solución:

a) Calculamos la recta tangente a la función en $x = 2$:

$$a = 2,\ \ b = f(a) = f(2) = 1,\ \ f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2},\ \ m = f'(a) = f'(2) = -\frac{1}{3}$$

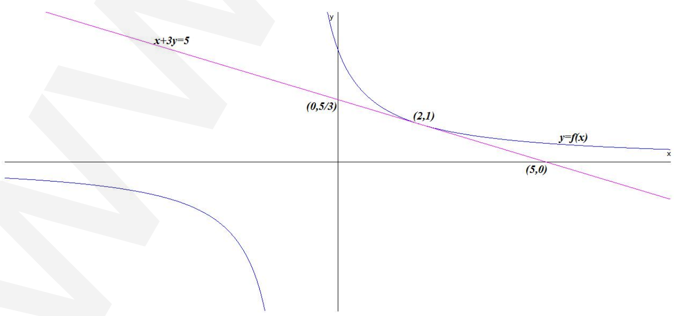
$$y - b = m(x - a) \Longrightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Longrightarrow x + 3y = 5$$

Calculamos los puntos de corte de esta recta con los ejes:
Con OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 5/3)$ y con OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow (5, 0)$, luego el área de estge triángulo es:

$$S_T = \frac{5 \cdot 5/3}{2} = \frac{25}{6}\ \ u^2$$

Otra forma:

$$S_T = \int_0^5 \frac{5 - x}{3}\, dx = \frac{1}{3}\left(5x - \frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^5 = \frac{25}{6}\ \ u^2$$



b) Asíntotas:

- Verticales: en $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1} \frac{3}{x+1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

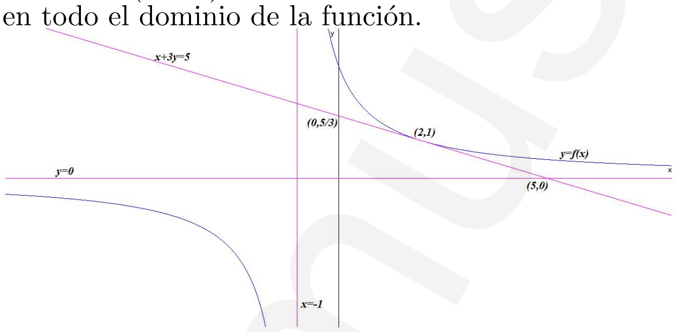
$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{3}{x+1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: en $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3}{x+1} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

$f'(x) = -\dfrac{3}{(x+1)^2} < 0\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\} \Longrightarrow f$ es decreciente en todo el dominio de la función.



c)

$$\int_0^2 x f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{3x}{x+1}\, dx = \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{x+1}\right) dx =$$

$$3x - 3\ln|x+1|\big]_0^2 = 6 - 3\ln 3$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dados los puntos $A(1,1,-2)$, $B(3,-1,4)$ y la recta $r : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O(0,0,0)$, P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano $\pi : z = 7$.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,5,0) \\ P_r(1,-2,3) \end{cases}$$

a) $P = \dfrac{A+B}{2} = (2,0,1)$, la recta que pasa por AB es

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{AB} = 2(1,-1,3) \\ P_s = A(1,1,-2) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = -2+3\lambda \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de esta recta con el plano $\pi : z = 7$: $-2+3\lambda = 7 \Longrightarrow \lambda = 3$, el punto Q es $Q(4,-2,7)$.

$$\overrightarrow{OP} = (2,0,1), \ \ \overrightarrow{OQ} = (4,-2,7)$$

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = | \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} | = \frac{1}{2}|(2,-10,-4)| = \sqrt{30} \ \ u^2$$

b) $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (3,5,0) \Longrightarrow \pi' : 3x+5y+\lambda = 0$ sustituyendo A tenemos $3+5+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -8 \Longrightarrow \pi' : 3x+5y-8 = 0$

c)

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}| \cdot |\overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-2|}{\sqrt{34}\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{374}}{187} = 0,1034175379$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30ºC y varianza 25. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28ºC y 32ºC.

b) (1 punto) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36ºC.

c) (0,75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50 % de los días del mes.

Solución:

$$\sigma^2 = Var(X) = 25 \Longrightarrow \sigma = 5 \Longrightarrow N(30,5)$$

a) $P(28 \leq X \leq 32) = P\left(\dfrac{28-30}{5} < Z < \dfrac{32-30}{5}\right) = P(-0,4 < Z < 0,4) = P(Z < 0,4) - P(Z < -0,4) = P(Z < 0,4) - (1 - P(Z < 0,4)) = 2P(Z < 0,4) - 1 = 2 \cdot 0,6554 - 1 = 0,3108$

b) $P(X \geq 36) = P\left(Z > \dfrac{36-30}{5}\right) = P(Z > 1,2) = 1 - P(Z < 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151$. Como el mes de junio tiene 30 días tendremos $30P(X \geq 36) = 30 \cdot 0,1151 = 3,453 \Longrightarrow$ entre 3 o 4 días se superaran los 36^{o} de temperatura.

c) $P(X \geq a) = P\left(Z > \dfrac{a-30}{5}\right) = 1 - P\left(Z < \dfrac{a-30}{5}\right) = 0,5 \Longrightarrow \dfrac{a-30}{5} = 0 \Longrightarrow a = 30^{\text{o}}$