Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato CN

Diciembre 2019

Problema 1 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(\dfrac{2}{\ln((1+x)^2)}-\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(x\ln(x))$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\cos x-1}{x\sin x}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow -1}\dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$
7. Dada la función $f(x)=x^2e^{-x}$, calcular:
   $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$
8. Determine el valor de la constante k para que se verifique que:
   $$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(\dfrac{2}{\ln((1+x)^2)}-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(x\ln(x))=0$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\cos x-1}{x\sin x}=-\dfrac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=e^{1/2}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow -1}\dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{2}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}=\dfrac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(x^2e^{-x})=0$
$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}(x^2e^{-x})=\infty.$

8. $k=-5.$

Problema 2 Calcular las rectas tangente y normal en los sigientes casos:

1. a la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x+8}{x-1}$ en el punto de abcisa $x=2$.

2. a la función $f(x)=2xe^{x-1}$ en el punto de abcisa $x=1$.

3. En este caso sólo la recta o rectas tangentes la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$ sabiendo que ésta o éstas son paralelas a la recta $y=-2x+2$.

Solución:

1. $f(2)=6$, $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-5}{(x-1)^2}\Longrightarrow m=f'(2)=-5$:

$$\text{Recta tangente}: y-6=-5(x-2)$$

$$\text{Recta normal}: y-6=\frac{1}{5}(x-2)$$

2. $f(1)=2$, $f'(x)=2e^{x-1}(x+1)\Longrightarrow m=f'(1)=4$:

$$\text{Recta tangente}: y-2=4(x-1)$$

$$\text{Recta normal}: y-2=-\frac{1}{4}(x-1)$$

3. $m=f'(a)=-2$:

$$f'(x)=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}\Longrightarrow m=f'(a)=\frac{a^2+4a+1}{(a+2)^2}=-2\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a=-1\Longrightarrow b=f(-1)=0\Longrightarrow y=-2(x+1)\\ a=-3\Longrightarrow b=f(-3)=-8\Longrightarrow y+8=-2(x+3)\end{cases}$$

Problema 3 Calcular las siguientes integrales

1. Considere la función $f(x)=(x+10)e^{2x}$. Calcule un primitiva $F(x)$ tal que $F(0)=0$.

2. $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$, puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

3. Mediante el cambio de variable $t=e^x$, calcula $\displaystyle\int\frac{2}{2+e^x}\,dx$.

4. $\displaystyle\int (x(\ln x)^2)\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx$

7. $\displaystyle\int 7x^2e^{5x^3+3}\,dx$

Solución:

1. $f(x) = \dfrac{(2x+19)e^{2x}}{4} - \dfrac{19}{4}$.

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}\,dx = \ln|e^x| - \ln|2+e^x| + C = x - \ln|2+e^x| + C$

4. $\displaystyle\int (x(\ln x)^2)\,dx = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{17}{2}\ln|x+3| + C$

6. $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx = 2\ln|x-1| + 3\ln|x+3| + C$

7. $\displaystyle\int 5x^2e^{2x^3-1}\,dx = \frac{7}{15}e^{2x^3-1} + C$