Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Abril 2020

Problema 1 Dadas las curvas $y = x^2/2$, $y = 4/x$.

a) Calcula sus puntos de corte.

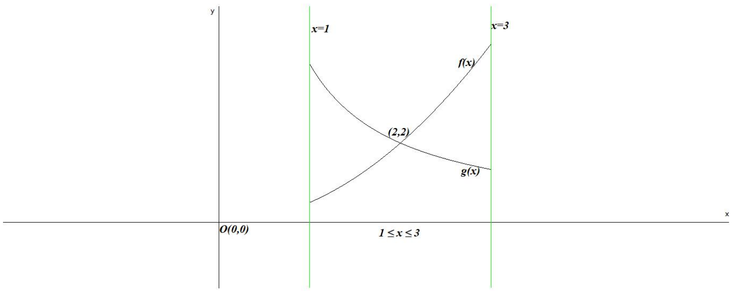
b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$.

c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$.

Solución:

a) $x^2/2 = 4/x \Longrightarrow \frac{x^3-8}{x} = 0 \Longrightarrow x = 2$

b) Gráfica:

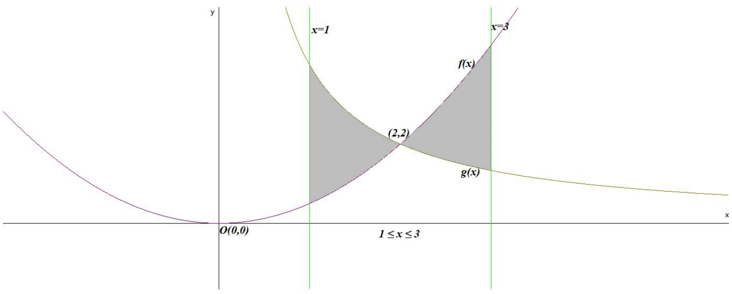


c) Hay dos áreas:

$$S_1 = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}\right) dx = \left.\frac{x^3}{6} - 4\ln x\right]_2^3 = \frac{19}{6} - 4\ln\frac{3}{2} \simeq 1,545$$

$$S_2 = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left.4\ln x - \frac{x^3}{6}\right]_1^3 = -\frac{7}{6} + 4\ln 2 \simeq 1,606$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{19}{6} - 4\ln\frac{3}{2} - \frac{7}{6} + 4\ln 2 = 2 - 4\ln\frac{3}{4} \simeq 3,151\ u^2$$



Problema 2 Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{a-x^2}{2+x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.

b) Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?

c) Sea $g(x)$ una función integrable, si $\displaystyle\int_0^3 g(x)\,dx = 4$ y $\displaystyle\int_2^3 g(x)\,dx = 6$, ¿Cuánto vale $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx$?

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{a-x^2}{2+x} = \frac{a}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \Longrightarrow a = 1$$

b) Como $x = 2 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{a-x^2}{2+x} \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{x^2+4x+a}{(x+2)^2}$ como $f'(2) = 0 \Longrightarrow a = -12$.

c) Sea $G(x) = \displaystyle\int g(x)\,dx$:

$\displaystyle\int_0^3 g(x)\,dx = G(3) - G(0) = 4$ y $\displaystyle\int_2^3 g(x)\,dx = G(3) - G(2) = 6$

Luego: $G(2) - G(0) = \displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx = -2$

Problema 3 Se pide:

a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (ax^2 + bx + 2) = a + b + 2 \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2}) = a - b \end{array} \right. \Longrightarrow a+b+2 = a-b \Longrightarrow b = -1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} + \frac{2b}{x^3} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1^-) = 2a + b \\ f'(1^+) = \frac{a}{2} + 2b \end{cases} \Longrightarrow 2a + b = \frac{a}{2} + 2b \Longrightarrow 3a - 2b = 0$$

$$\begin{cases} b = -1 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = -2/3$$

b) La función $f(x) = x^2 - 4$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$, derivable en el intervalo $(-3, 3)$ y $f(3) = f(-3) = 5$. Luego verifica las condiciones del teorema de Rolle y podemos concluir que $\exists c \in [-3, 3]/f'(c) = 0$.

Se puede calcular este punto:
$f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y como $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(0) = 2 > 0 \Longrightarrow$ $x = 0$ es un mínimo. El punto $c = 0$.

Problema 4 Se pide:

a) Demuestra que la ecuación $\sin x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$.

b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$.

Solución:

a) La función $f(x) = \sin x - 2x + 1$ es continua en el intervalo $[0, \pi]$, $f(\pi) = -2\pi + 1 < 0$ y $f(0) = 1 > 0$. Por el teorema de Bolzano $\exists c \in [0, \pi]/f(c) = 0$, por tanto la ecuación dada tiene al menos una solución.

b) La función $f(x) = \sin x - 2x + 1$ es continua en el intervalo $[-200, 200]$ y derivable en el intervalo $(-200, 200)$.
$f'(x) = \cos x - 2 < 0 \, \forall x \in (-200, 200) \Longrightarrow f$ es decreciente en todo el intervalo y además cambia de signo en los extremos $f(-200) = 401, 34$ y $f(200) = -399, 34$, luego sólo existe un punto c que cumpla que $f(c) = 0$.

Problema 5 Las páginas de un libro deben tener cada una 600 cm^2 de superficie, con márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm en cada lado. Calcule las dimensiones de la página que permiten la mayor superficie impresa posible.

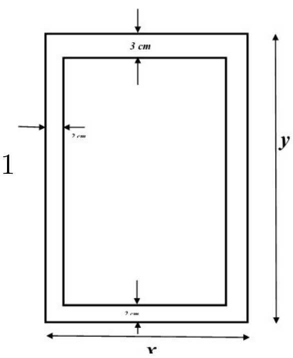
Solución:

$xy = 600 \Longrightarrow y = \dfrac{600}{x}$

$S(x, y) = (x - 4)(y - 5) \Longrightarrow S(x) = \dfrac{-5x^2 + 620x - 2400}{x}$

$S'(x) = \dfrac{5(480 - x^2}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 21,91, \quad x = -21,91$

	$(0; 21,91)$	$(21,91; \infty)$
$S'(x)$	$+$	$-$
$S(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$



Hay un máximo en el punto $x = 21,91$ cm $\Longrightarrow y = 27,39$ cm.

Problema 6 Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.

b) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f) = (0, +\infty)$

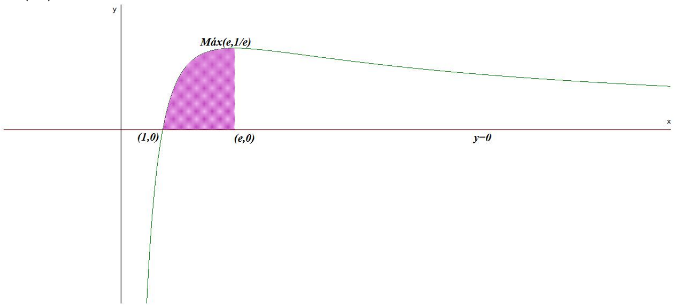
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ por la derecha.}$$

b) $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Longrightarrow 1 - \ln x = 0 \Longrightarrow x = e$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función crece en el intervalo $(0, e)$ y decrece en el intervalo $(e, +\infty)$. Luego presenta un máximo relativo en el punto $(e, 1/e)$.

c) $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ luego el intervalo de integración sería el $[1, e]$.



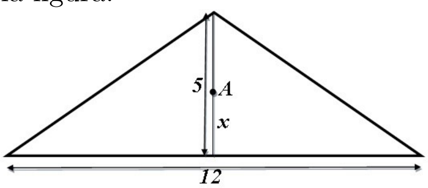
Aunque se trata de una integral inmediata dejo la solución por partes por las características de su resolución.

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{1}{x}dx \Longrightarrow v = \ln x \end{array}\right] = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x}\,dx \Longrightarrow$$

$$2\int \frac{\ln x}{x}\,dx = (\ln x)^2 \Longrightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$S = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2}\,u^2$$

Problema 7 Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



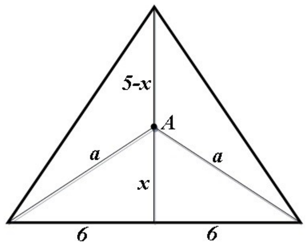
a) Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$.

b) Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) Calcule dicha cantidad mínima.

Solución:

a) La función suma de distancia de A a los vértices es: $f(x) = 2a + 5 - x = 5 - x + 2\sqrt{x^2+36}$ según se deduce del dibujo.



b) $f'(x) = \dfrac{2x - \sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}} = 0 \Longrightarrow x = 2\sqrt{3}$

	$(0, 2\sqrt{3})$	$(2\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0, 2\sqrt{3})$ y creciente en el intervalo $(2\sqrt{3}, \infty)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(2\sqrt{3}, 5+6\sqrt{3}) = (3,46; 15,39)$.

c) $f(2\sqrt{3}) = 5 + 6\sqrt{3} \simeq 15,39$ cm