Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2019

Problema 1 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$A = \left\{ \begin{array}{rrrr} kx+ & (k+1)y+ & z = & 0 \\ -x+ & ky- & z = & 0 \\ (k-1)x- & y & = & -(k+1) \end{array} \right.$$

se pide:

1. (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.
2. (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

(Julio 2019 (Madrid))

Solución:

1. $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -2k^2 + 2 = 0 \Longrightarrow$ $k = \pm 1$. Luego
   - Si $k \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A}$ =nº de incógnitas$\Longrightarrow SCD$.
   - Si $k = 1$:
     $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) =$
     $\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 + F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right) \Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema incompatible. (SI)
   - Si $k = -1$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema homogéneo y $|A| = 0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado. (SCI)

2. Si $k = -1$: $\left\{ \begin{array}{r} -x + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

Problema 2 *(2 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I_2 la matriz identidad de orden 2. Se pide:

1. (0,5 puntos) Calcular el valor de x de modo que se verifique la igualdad $B^2 = A$.
2. (0,5 punto) Calcular el valor de x para que $A - I_2 = B^{-1}$.
3. (1 punto) Calcular el valor de x para que $A \cdot B = I_2$.

(Junio 2019 (Islas Canarias))
Solución:

1. $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = 1$
2. $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   $A - I_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
   $x = 0$
3. $A \cdot B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
   $x = -1$

Problema 3 *(1 punto)*Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcular los valores de x e y para que el producto AM sea igual a la inversa de N
(Septiembre 2019 (Castilla-León))

Solución:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y & 1 \\ -y & 1 \end{pmatrix} = N^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ \\ y = -1 \end{cases}$$

Problema 4 *(1 punto)*Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Probar que la inversa de A es $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$

(Septiembre 2019 (Extremadura))

Solución:

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 - 3A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 5 *(2 puntos)* Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; se pide:

1. (1 punto) Calcula razonablemente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

2. (1 punto) Para $a = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $XA = B - X$.

(Septiembre 2019 (Castilla La Mancha))

Solución:

1. $|A| = a(a+2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = -2$. Luego Rango$(A) = 3$ $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, -2\}$.

   Si $a = 0 \Longrightarrow |A| = 0$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

   Si $a = -2 \Longrightarrow |A| = 0$ y $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

2. Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

   $XA = B - X \Longrightarrow XA + X = B \Longrightarrow X(A+I) = B \Longrightarrow X = B(A+I)^{-1}$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Problema 6 *(2 puntos)* Sea la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ donde a es un parámetro real; se pide:

1. (1 punto) Calcular para qué valores de a se verifica la igualdad $M^2-M-2I=O$, donde I es la matriz identidad y O es la matriz nula. Todas las matrices son de orden 2.
2. (1 punto) Utiliza la expresión anterior para obtener la inversa de N como expresión general de a. Calcular M^{-1} para $a=\sqrt{2}$ utilizando la expresión obtenida anteriormente.

(Junio 2019 (Cataluña))

Solución:

1. $M^2=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a^2-2 & 0 \\ 0 & a^2-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow a^2-2=0\Longrightarrow a=\pm\sqrt{2}$$

2.

$$M^2-M=O+2I=2I\Longrightarrow M(M-I)=2I\Longrightarrow M\left[\frac{1}{2}(M-I)\right]=I$$

$$\Longrightarrow M^{-1}=\frac{1}{2}(M-I)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a/2 \\ a/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Si $a=\sqrt{2}\Longrightarrow M^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$