Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2019

Problema 1 *(2,5 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro resl a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & (a-2)y- & z= & 1\\ x- & 2y+ & z= & -4\\ x- & 3y+ & az= & -a^2 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Discutir el sistema para los diferentes valores de a.
2. (1 punto) Resolverlo para $a = 3$.

(Septiembre 2019 (Aragón))

Solución:

1. $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -(a-2) & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -4\\ 1 & -3 & a & -a^2 \end{array}\right)$ $|A| = a^2 - 5a + 6 = 0 \Longrightarrow a = 2$ y $a = 3$
   Si $a \neq 2$ y $a \neq 3 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
   Si $a = 2$:
   $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -4\\ 1 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2 - F_1\\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -6\\ 0 & -3 & 3 & -5 \end{array}\right) =$
   $\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3 - 3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema incompatible.
   Si $a = 3$:
   $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -4\\ 1 & -3 & 3 & -9 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2 - F_1\\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -5\\ 0 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right) =$
   $\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

2. Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y- & z= & 1\\ x- & 2y+ & z= & -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 3\lambda\\ y = 5 + 2\lambda\\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3,5 puntos)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ donde $x \in \mathbb{R}$. Se pide:

1. (1 punto) Estudiar para que valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I es la matriz identidad y O la matriz nula)

2. (1 puntos) Calcular A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior.

3. (1,5 puntos) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A.

(Junio 2019 (Asturias))
Solución:

1. $A^3 - I = O \Longrightarrow A^3 = I \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^2 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = 0$$

2. $A^{12} = (A^3)^4 = I^4 = I$

3. $A^2 \cdot A = I \Longrightarrow A^2 = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 3 *(1,5 puntos)*Sabiendo que $a = -2$ calcular el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix}$$

(Junio 2019 (Aragón))

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a-c \\ 2a & 3a+2b & 4a-2c \\ 3a & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & a+b & a-c \\ 2 & 3a+2b & 4a-2c \\ 3 & 6a+3b & 10a-3c \end{vmatrix} =$$

$$a \left(\begin{vmatrix} 1 & a & a-c \\ 2 & 3a & 4a-2c \\ 3 & 6a & 10a-3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b & a-c \\ 2 & 2b & 4a-2c \\ 3 & 3b & 10a-3c \end{vmatrix} \right) = a \begin{vmatrix} 1 & a & a-c \\ 2 & 3a & 4a-2c \\ 3 & 6a & 10a-3c \end{vmatrix} =$$

$$a \left(\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 2 & 3a & 4a \\ 3 & 6a & 10a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & -c \\ 2 & 3a & -2c \\ 3 & 6a & -3c \end{vmatrix} \right) =$$

$$a\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 2 & 3a & 4a \\ 3 & 6a & 10a \end{vmatrix} = a^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = a^3 \cdot 1 = -8$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

1. (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.
2. (0,75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.
3. (0,75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

(Julio 2019 (Madrid))

Solución:

1. $A^2 - I = 2A$:

$$\begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2+2a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2-2a+1 = 2-2a \Longrightarrow a = \pm 1 \\ a^2+2a+1 = 2+2a \Longrightarrow a = \pm 1 \end{array}\right.$$

2. $|A| = -a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} -(a+1) & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a+1}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$$

3. $|(AA^t)^2| = |(AA^t)|^2 = |(AA^t)||(AA^t)| = |A||A^t||A||A^t| = |A||A||A||A| = |A|^4 = (-a^2)^4 = a^8$