Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Octubre 2019

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 & 3 \\ 2 & m & m & 2 \\ m & -4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 2 & m & m \\ m & -4 & 5 \end{vmatrix} = 12m^2 - 12 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ m & -4 & -5 \end{vmatrix} = -4(2m^2 - 3m + 1) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = \frac{1}{2}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ m & 5 & -5 \end{vmatrix} = -4(2m^2 + 3m - 5) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = -\frac{5}{2}$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ m & m & 2 \\ -4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 12(m - 1) = 0 \Longrightarrow m = 1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.

Cuando $m = 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Problema 2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (1 punto). Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.
2. (1 punto). Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

Solución:

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 5 \end{array} \right.$$

$$A^2 = 2A + 5I$$

2. $A^3 = A^2 \cdot A = (2A + 5I)A = 2A^2 + 5A = 2(2A + 5I) + 5A = 9A + 10I$

$$A^3 = 9 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 9 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (9A+10I)A = 9A^2+10A = 9(2A+5I)+10A = 28A+45I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (28A+45I)A = 28A^2+45A = 28(2A+5I)+45A = 101A+140I$$

$$A^5 = 101 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 140 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 443 & 101 \\ 202 & 39 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} X - 5Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} X - 5Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} 14/11 & 2/11 \\ -2/11 & 14/11 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} 5/11 & -4/11 \\ -7/11 & -6/11 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -a & -b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b & b \\ -c+d & d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -a = -a+b \Longrightarrow \; b = 0 \\ -b = b \Longrightarrow \; b = 0 \\ a+c = -c+d \Longrightarrow \; d = a+2c \\ b+d = d \Longrightarrow \; b = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a+2c \end{pmatrix}$.