Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Octubre 2019

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & -1 \\ m & -1 & m \\ 10 & 9 & m \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{vmatrix} = -m^3+9m^2-9m-10 = 0 \Longrightarrow m = 2,\ \ m = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$$

Si $m = 2$ o $m = \dfrac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

Si $m \neq 2$ y $m \neq \dfrac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 10 & 9 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 9/10 & 1/10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$$

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $X - B = AX + C$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ \ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};\ \ C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$X - B = AX + C \Longrightarrow X = (I - A)^{-1}(C + B)$$

$$I-A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \ (A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$C + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = (I - A)^{-1}(C + B) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9/4 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & -1 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & -1 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2+\mathrm{F}_3+\mathrm{F}_4 \\ \mathrm{F}_2 \\ \mathrm{F}_3 \\ \mathrm{F}_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 1 & x & -1 & 0 \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 & 0 \\ -1 & 0 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_2-\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_3+\mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_4 \end{bmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & x+1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$x\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 1 & x+1 & 2 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^4-2x^2+4x$$