Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria-Coincidente 2019) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $A \cdot B$ y determínense los valores de x para los cuales $A \cdot B$ es invertible.

b) Calcúlese la inversa de $A \cdot B$ cuando $x = 1$.

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & -2 & -2 \\ 2+x & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A \cdot B| =$ $2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$. Luego $\exists (A \cdot B)^{-1} \ \ \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$

b) Para $x = 1$:
$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A \cdot B)^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

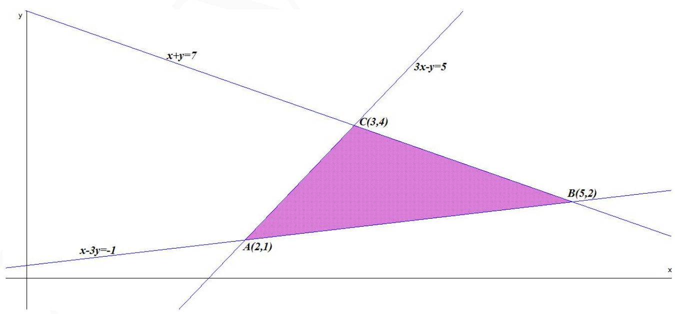
$$3x - y \geq 5, \quad 3y - x \geq 1, \quad y + x \leq 7$$

a) Represéntese S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el valor máximo de la función $f(x, y) = x + 4y$ en S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor.

Solución:

a) Los vértices a estudiar serán: $A(2, 1)$, $B(5, 2)$ y $C(3, 4)$



b) $f(x,y) = x + 4y$ en S: $\begin{cases} f(2,1) = 6 \\ f(5,2) = 13 \\ f(3,4) = 19 \end{cases} \Longrightarrow$ El valor máximo será de 19 y se alcanza en el punto $C(3,4)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

a) Determínense las asíntotas verticales y horizontales de f, si las hubiese.

b) Calcúlese la derivada de $f(x)$, para los valores de x en donde f es derivable y determínese la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto $x = 1$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

  En $x = -2$:

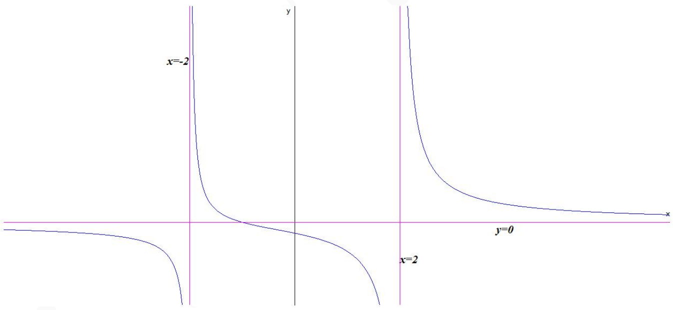
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} \dfrac{x+1}{x^2-4} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$.

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2-4} = 0$$

- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2+2x+4}{(x^2-4)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -\dfrac{7}{9}$



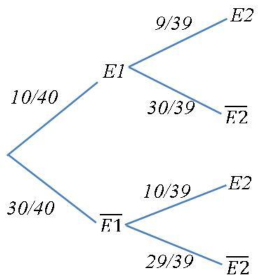
Problema 4 *(2 puntos)* Una única carta, escogida al azar, es eliminada, sin ser vista, de una baraja española de 40 cartas, 10 cartas de cada palo (espadas, copas, oros y bastos). Una vez eliminada, se escoge al azar otra carta, entre las que quedan en el mazo, y se observa.

a) Calcúlese la probabilidad de que la carta observada sea del palo de espadas.

b) Si la carta observada no es del palo de espadas, calcúlese la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

Solución:

$E1$: la primera carta es espadas, $\overline{E1}$: la primera carta no es espadas, $E2$: la segunda carta es espadas y $\overline{E2}$: la segunda carta no es espadas.



a) $P(E2) = P(E2|E1)P(E1) + P(E2|E2)P(E2) = \dfrac{9}{39} \cdot \dfrac{10}{40} + \dfrac{10}{39} \cdot \dfrac{30}{40} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

b) $P(\overline{E1}|\overline{E2}) = \dfrac{P(\overline{E2}|\overline{E1})P(\overline{E1})}{P(\overline{E2})} = \dfrac{29/39 \cdot 30/40}{1 - 1/4} = \dfrac{29}{39} = 0,744$

Problema 5 *(2 puntos)* En las especificaciones de una máquina tragaperras se establece que la proporción P de veces que la máquina devuelve algo a quien la use es $1/4$.

a) Utilice la aproximación por la distribución normal para calcular la probabilidad de obtener al menos 20 devoluciones de 100 veces que se juega.

b) Sin tomar en cuenta las especificaciones, si en 100 juegos la máquina devolvió algo al jugador sólo en 15 ocasiones, calcúlese un intervalo de confianza del 99 % para la proporción P.

Solución:

a) $p = \dfrac{1}{4}$, $q = \dfrac{3}{4}$ y $n = 100$. Como $n > 10$, $np = 100 \cdot 0,25 = 25 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0,75 = 75 > 5$ podemos utilizar la aproximación a una normal:

$$X \approx B(n;p) \Longrightarrow X \approx N(np; \sqrt{npq})$$
$$X \approx B(100; 0,25) \Longrightarrow X \approx N(25; 4,33)$$
$$P(X \geq 20) = P\left(Z > \frac{19,5 - 25}{4,33}\right) = P(Z > -1,27) = 1 - P(Z < -1,27)$$
$$= 1 - (1 - P(Z < 1,27)) = P(Z < 1,27) = 0,8980$$

b) $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 2,575$, $\hat{p} = \dfrac{15}{100} = 0,15 \Longrightarrow \hat{q} = 0,85$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 2,575\sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{100}} = 0,092$$

$$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,15 - 0,092; 0,15 + 0,092) =$$
$$(0,058; 0,242) = (5,8\,\%; 24,2\,\%)$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria-Coincidente 2019) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax - z = 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discútase la unicidad de la solución del sistema en función del valor de a.

b) Resuélvase el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 2 - a = 0 \Longrightarrow a = 2$$

- Si $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ z = -6 \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Considérese la función de variable real

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si} \quad x < 0 \\ a + e^{-5x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determínese el valor de a para que la función sea continua en $x = 0$.

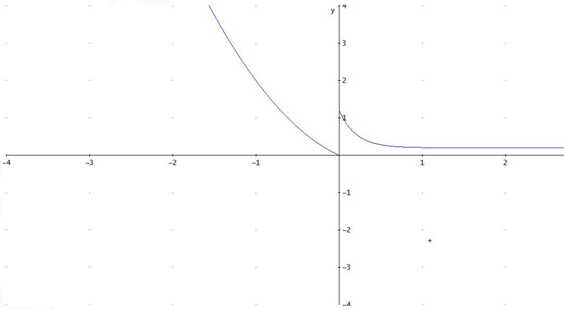
b) Para $a = 1/5$, calcúlese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1/5$, y la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(x^2-x)=0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(a+e^{-5x})=a+1 \end{array}\right. \Longrightarrow a+1=0\Longrightarrow a=-1$$

b) En el intervalo $[0,1/5]$ la función es $f(x)=\dfrac{1}{5}+e^{-5x}$ comprobamos si la función corta al eje OX en ese intervalo:

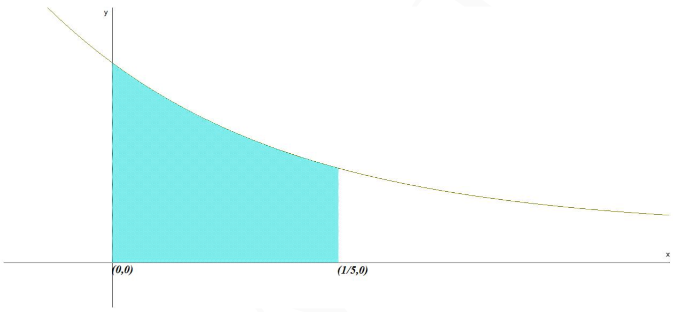


$f(x)=\dfrac{1}{5}+e^{-5x}=0\Longrightarrow e^{-5x}=-\dfrac{1}{5}$ no tiene soluciones reales.

$$F(x)=\int\left(\frac{1}{5}+e^{-5x}\right)\,dx=\frac{x-e^{-5x}}{5}+C$$

$$S_1=\int_0^{1/5}\left(\frac{1}{5}+e^{-5x}\right)\,dx=F\left(\frac{1}{5}\right)-F(0)=\frac{6}{25}-\frac{1}{5e}\simeq 0,166$$

$$S=|S_1|=\frac{6}{25}-\frac{1}{5e}\simeq 0,166\ u^2$$



Problema 3 *(2 puntos)* considera la función de variable real

$$f(x)=\frac{x-3}{x^2-2x}$$

a) Determínense las asíntotas verticales y horizontales, si las hubiese.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales:
En $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-3}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-3}{0^-}\right] = +\infty \end{cases}$$

En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \dfrac{x-3}{x^2-2x} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- Horizontales: $y = 0$.

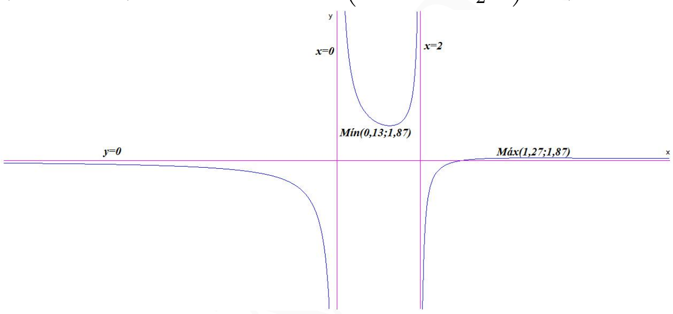
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2-2x} = 0$$

- Oblícuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2-6x+6}{x^2(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$

	$(-\infty, 3-\sqrt{3})$	$(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$	$(3+\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(3-\sqrt{3}, 2) \cup (2, 3+\sqrt{3})$, y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}, \infty)$, tiene un mínimo en el punto $\left(3+\sqrt{3}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = (0,13; 1,87)$ y un máximo en $\left(3-\sqrt{3}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) = (1,27; 1,87)$.



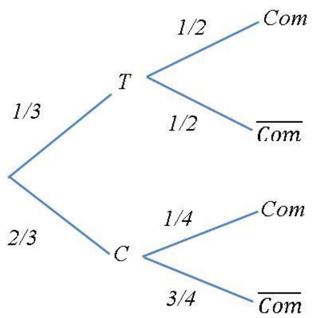
Problema 4 *(2 puntos)* Se lanza un dado para decidir si se va al cine o al teatro. Si sale 1 o 6 se va al teatro, en caso contrario se va al cine. Luego, se escoge una función al azar, de cine o teatro, según lo que haya indicado el dado. El 50 % de funciones de teatro son comedias mientras que sólo 112 de las 448 funciones de cine lo son.

a) Calcúlese la probabilidad de ver una comedia.

b) Si el resultado fue no ver comedia, calcúlese la probabilidad de que haya sido en el teatro.

Solución:

T: teatro, C: cine, Com: comedia y $\overline{Com}$: no comedia.



a) $P(Com) = P(Com|T)P(T) + P(Com|C)P(C) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(T|\overline{Com}) = \dfrac{P(\overline{Com}|T)P(T)}{P(\overline{Com})} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{4}$

Problema 5 *(2 puntos)* La factura, en euros, de una cena para una persona, reservando en pucherodelujo.com, se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media $\mu = 25$ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) Calcúlese la probabilidad de que el coste medio por comensal, de 9 personas escogidas al azar que reserven en la página, no sea mayor que 30 euros.

b) Determínese el número mínimo de comensales que debería tener una muestra aleatoria simple para que el coste medio por comensal no exceda los 30 euros con probabilidad no inferior a 0,95.

Solución:

$$N(25;5)$$

a) $n = 9 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(25, \dfrac{5}{3}\right)$

$$P(\overline{X} \le 30) = P\left(Z < \frac{30-25}{5/3}\right) = P(Z < 3) = 0,9987$$

b) $P\left(\overline{X} \le 30\right) \ge 0,95 \Longrightarrow P\left(Z \le \frac{30-25}{5/\sqrt{n}}\right) \ge 0,95 \Longrightarrow \sqrt{n} \ge 1,645 \Longrightarrow n \ge 2,7 \Longrightarrow n = 3.$