Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2019) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real.

a) Determínese para qué valores de m para los que la matriz A es invertible.

b) Considérese la ecuación matricial $A \cdot X = A \cdot B + B$. Para $m = 5$, exprésese X en función de A y B y calcúlese la matriz X.

Solución:

a) $|A| = 3(m-4) = 0 \Longrightarrow m = 4$
La matriz será invertible para cualquier valor de $m \in \mathbb{R} - \{4\}$.

b) Para $m = 5$: $A \cdot X = A \cdot B + B \Longrightarrow X = A^{-1}(A \cdot B + B) = A^{-1}(A + I)B = (I + A^{-1})B$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 13/3 & -5/3 & -7/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I + A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13/3 & -2/3 & -7/3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13/3 & -2/3 & -7/3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 11/3 & 13/3 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$-2x + 3y \leq 4; \quad 2x + y \geq 4; \quad 2x - y \leq 4.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

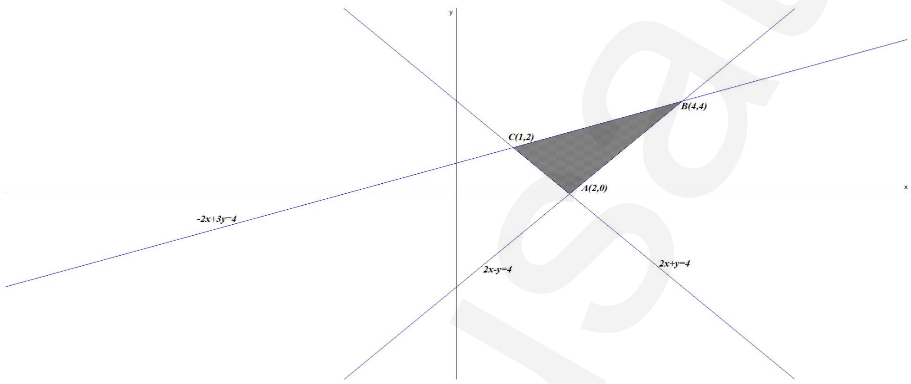
b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 0,5x + \frac{1}{3}y$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 0,5x + \frac{1}{3}y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} -2x + 3y \leq 4 \\ 2x + y \geq 4 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$$

La región S y los vértices a estudiar serán: $A(2,0)$, $B(4,4)$ y $C(1,2)$:



b)

$$\begin{cases} f(2,0) = 1 \text{ Mínimo} \\ f(4,4) = 10/3 \text{ Máximo} \\ f(1,2) = 7/6 \end{cases}$$

El máximo es $10/3$ y se alcanza en el punto $B(4,4)$ mientras que el mínimo es de 1 y se alcanza en el punto $A(2,0)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$$

a) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcúlense sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$ la pendiente de la recta es $m = f'(0) = \dfrac{1}{4}$ y el punto de tangencia será $(0, f(0)) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. La recta es:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 0) \Longrightarrow x - 4y + 2 = 0$$

b) Asíntotas:

- Verticales:
En $x = 1$:
$\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{2x}{2x+1} = \dfrac{2}{3}$, luego en $x = 1$ no hay asíntota, hay un una discontinuidad evitable (un agujero)
En $x = -2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Problema 4 *(2 puntos)* En una determinada sede de la $EVAU$ hay un 45 % de alumnos de la modalidad de ciencias y un 40 % de Ciencias Sociales. Todos los alumnos de Ciencias Sociales hacen el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II ($MACCSSII$). De los alumnos de Ciencias de esa sede, un 5 % va a realizar el examen de $MACCSSII$. En esa sede ningún alumno del resto de modalidades se examina de $MACCSSII$. Se toma a un alumno al azar de esa sede. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Se examine de $MACCSSII$.

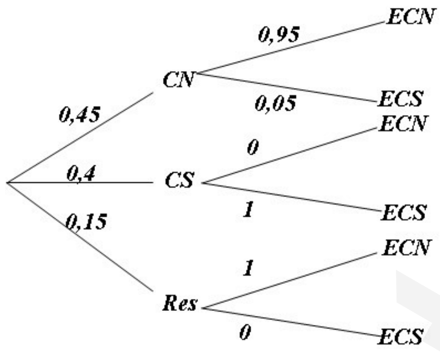
b) Sabiendo que se examina de $MACCSS$ sea un alumno de la modalidad de Ciencias.

Solución:

a) $P(ECS) = P(ECS|CN)P(CN)+P(ECS|CS)P(CS)+P(ECS|Res)P(Res) = 0,45 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 1 + 0,15 \cdot 0 = 0,4225$

b) $P(CN|ECS) = \dfrac{P(ECS|CN)P(CN)}{P(ECS)} = \dfrac{0,05 \cdot 0,45}{0,4225} = 0,053$

Problema 5 *(2 puntos)* Una plataforma de televisión quiere lanzar un nuevo paquete de contenidos de pago. Por ello desea estimar la proporción de clientes, P, que estarían dispuestos a contratarlo.



a) Asumiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de individuos para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 2 % (±2 %).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 500 clientes de los cuales 85 afirmaron que contratarían el paquete. Obténgase un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de individuos que estarían dispuestos a contratar el paquete.

Solución:

a) $p = 0,5$, $q = 1 - p = 0,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,02 \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,02}\right)^2 = 2401 \Longrightarrow n = 2401$$

b)

$$p_r = \frac{85}{500} = 0,17 \Longrightarrow q_r = 1 - p_r = 0,83 \text{ y } z_{\alpha/2} = 1,645:$$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} = 1,645\sqrt{\frac{0,17 \cdot 0,83}{500}} = 0,0283$$

$$IC = (p_r - E, p_r + E) = (0,142; 0,198)$$

Entre el 14,2 % y el 19,8 %

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2019) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} 6x+2y+z=1\\ x+3y+z=2\\ 5x-y+az=-1\end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 2\\ 5 & -1 & a & -1\end{array}\right);\quad |A|=16a=0\Longrightarrow a=0$$

- Si $a\neq 0\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 2\\ 5 & -1 & 0 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 6F_2-F_1\\ 6F_3-5F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 16 & 5 & 11\\ 0 & -16 & -5 & -11\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 16 & 5 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 6x+2y+z=1\\ x+3y+z=2\\ 5x-y=-1\end{array}\right.\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\lambda\\ y=\frac{11}{16}-\frac{5}{16}\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 2x+a & \text{si} & x<-1\\ e^{2x+2} & \text{si} & x\geq -1\end{array}\right.$$

a) Determínese el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para el cual $f(x)$ es una función continua en $x=-1$.

b) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x=0$ y $x=1$ y la gráfica de $f(x)$.

Solución:

a)
$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-}(2x+a)=-2+a\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+}e^{2x+2}=e^0=1\end{array}\right.\Longrightarrow -2+a=1\Longrightarrow a=3$$

b)
$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 e^{2x+2}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x+2}\Big]_0^1=\frac{e^2}{2}(e^2-1)\ u^2\simeq 23,6\ u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:
$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Solución:

a) $f'(x)=-\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}=0\Longrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

	$(-\infty,1-\sqrt{2})$	$(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$	$(1+\sqrt{2},\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$, y es decreciente en el intervalo $(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},\infty)$.

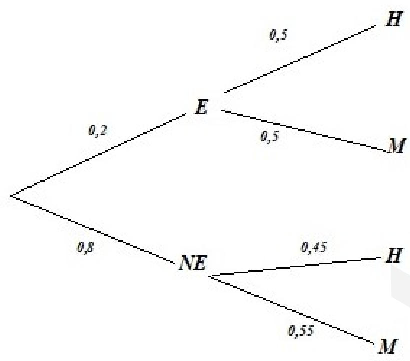
b) Tiene un máximo en $\left(1+\sqrt{2},\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)$ y un mínimo en $\left(1-\sqrt{2},-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Problema 4 *(2 puntos)* Se escoge al azar un cliente de un determinado hotel de la costa española. Se sabe que la probabilidad de que sea español es 0,2. La probabilidad de que siendo extranjero sea hombre es 0,45. Finalmente la probabilidad de que sea una mujer española es 0,1. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Conocido que es español, sea un hombre.

b) Sea una mujer.

Solución:



a) $P(M|E) = \dfrac{P(M\cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,1}{0,2} = \dfrac{1}{2} = 0,5 \Longrightarrow P(H|E) = 1 - P(M|E) = 0,5$

b) $P(M) = P(M|E)\cdot P(E) + P(M|NE)\cdot P(NE) = 0,5\cdot 0,2 + 0,55\cdot 0,8 = 0,54$

Problema 5 *(2 puntos)* El contenido en azúcares, medido en kilogramos (kg), de los botes de 1 kg de miel natural del Valle de Valdeón se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0,1$ kg.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0,025 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Sabiendo que $\mu = 0,7$ kg, calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la media del contenido en azúcares de esos botes sea menor que 0,65 kg.

Solución:

$$N(\mu; 0,1)$$

a) $E = 0,025$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,1}{\sqrt{n}} = 0,025 \Longrightarrow n \ge \left(\frac{0,1\cdot 1,96}{0,025}\right)^2 = 61,47 \Longrightarrow$$

$$n = 62$$

b) $\mu = 0,7$, $\sigma = 0,1$ y $n = 20$.

$$P(\overline{X} \le 0,65) = P\left(Z \le \frac{0,65 - 0,7}{0,1/\sqrt{20}}\right) = P(Z \le -2,24) =$$

$$1 - P(Z \le 2,24) = 1 - 0,9875 = 0,0125$$