Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2019) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran lan matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.

b) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Solución:

a) $A - 2B = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$|A - 2B| = 2k - 29 = 0 \Longrightarrow k = \dfrac{29}{2}$

b) Como C no es cuadrada no es invertible.

$$C^TC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |C^TC| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\exists (C^TC)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

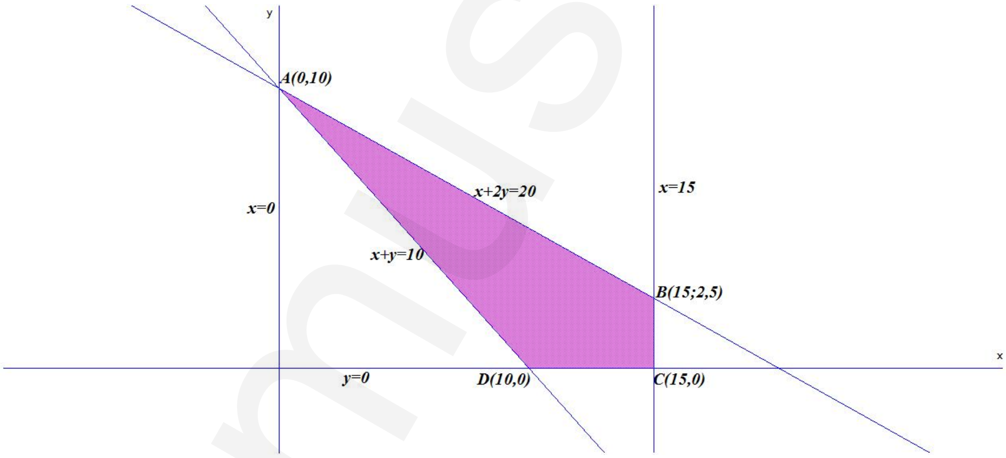
b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Solución:

x: litros de helado e y litros de horchata.

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x,y) = 25x + 12y$ calculando su máximo,, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S: \begin{cases} x + y \geq 10 \\ x + 2y \leq 20 \\ x \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(0,10)$, $B(15;5/2)$, $C(15,0)$ y $D(10,0)$:

b)

$$\begin{cases} f(0,10) = 120 \\ f(15;5/2) = 405 \ \text{Máximo} \\ f(15,0) = 375 \\ f(10,0) = 250 \end{cases}$$

El máximo es 405 euros y se alcanza en el punto $B(15;5/2))$ lo que supone preparar 15 litros de helado y 2,5 litros de horchata.

Problema 3 *(2 puntos)* La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 3)$.

b) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad $(\cup)$ y convexidad $(\cap)$ de esta función.

Solución:

a) $f(x) = \displaystyle\int (2x^2 - 4x - 6)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + C$ como $f(0) = 3 \Longrightarrow$ $C = 3$ luego la función será:

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 3$$

b) $f'(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 3$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, y es decreciente en el intervalo $(-1, 3)$. Tiene un máximo en $\left(-1, \dfrac{19}{3}\right)$ y un mínimo en $(3, -15)$.

$f''(x) = 4x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 1$:

	$(-\infty, 1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función tiene un punto de inflexión en el punto $\left(1, -\dfrac{13}{3}\right)$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,8$ y $P(A \cap \overline{B}) = 0,1$.

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso B.

b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

Solución:

Voy a resolver este problema organizando los valores en una tabla de intersecciones:

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B			$0,8$
$\overline{B}$	$0,1$		
Totales	$0,6$		1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	A	$\overline{A}$	Totales
B	$0,5$	$0,3$	$0,8$
$\overline{B}$	$0,1$	$0,1$	$0,2$
Totales	$0,6$	$0,4$	1

a) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,1}{0,2} = 0,5$

$$\left\{\begin{array}{l} P(A\cap\overline{B}) = 0,1 \\ P(A) = 0,6 \\ P(\overline{B}) = 0,2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P(A\cap\overline{B}) = 0,1 \\ P(A)\cdot P(\overline{B}) = 0,6\cdot 0,2 = 0,12 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$P(A\cap\overline{B}) \neq P(A)\cdot P(\overline{B}) \Longrightarrow$ A y $\overline{B}$ no son independientes.

b) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,5 = 0,9$

Problema 5 *(2 puntos)* El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.

a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99,2 % para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

Solución:

$N(\mu; 7)$ ya que $\sigma^2 = Var(X) = 49 \Longrightarrow \sigma = 7$

a) $n = 64$, $\overline{X} = 34$ y $NC = 0,992$:
$1-\alpha = 0,992 \Longrightarrow \alpha = 0,008 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,004$
$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,004 = 0,996 \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,65$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,65\frac{7}{\sqrt{64}} = 2,319 \Longrightarrow$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (34 - 2,319; 34 + 2,319) = (31,681; 36,319)$$

b) $E = 3$ y $NC = 95\,\% \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = 1,96\frac{7}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(1,96\frac{7}{3}\right)^2 = 20,91 \Longrightarrow n = 21$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2019) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro real m:

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x+my-z=0 \\ x-y-mz=0 \end{cases}$$

a) Determínense los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x=y=z=0$.

b) Resuélvase para $m=1$.

Solución:
Se trata de un sistema homogéneo.

a)

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -1 & -m \end{pmatrix}; \quad |A|=m^2-1=0 \Longrightarrow m=\pm 1$$

- Si $m\neq\pm 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única, la trivial $x=y=z=0$)
- Si $m=\pm 1$ se trata de un sistema compatible indeterminado. Un sistema homogéneo no puede ser incompatible.

b) Si $m=1$ la primera y la segunda ecuación son iguales cambiadas de signo, eliminamos una de ellas y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{8}{x^2+4}$$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{16x}{(x^2+4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, y es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$. Tiene un máximo en $(0, 2)$.
Asíntotas:

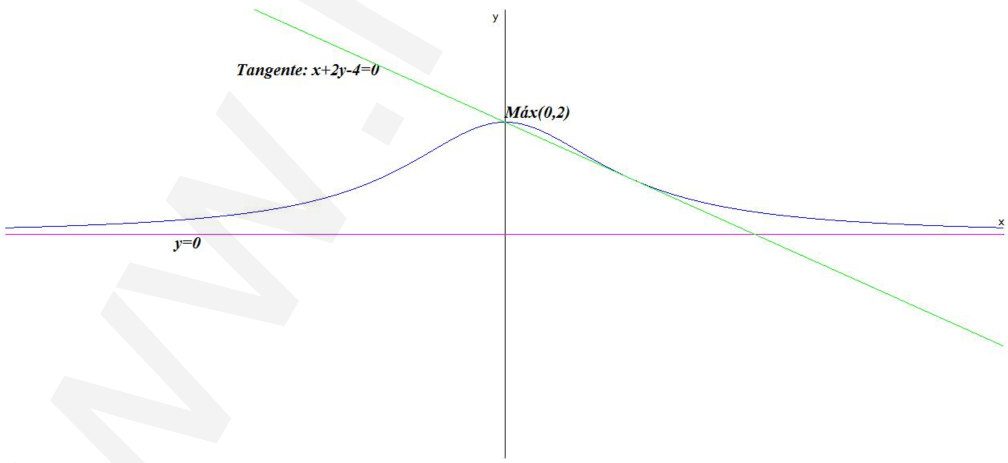
- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{8}{x^2+4} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) La pendiente de la recta es $m = f'(2) = -\dfrac{1}{2}$ y el punto de tangencia será $(2, f(2)) = (2, 1)$. La recta es:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \Longrightarrow x + 2y - 4 = 0$$



Problema 3 *(2 puntos)* La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & \text{si} \quad x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.

b) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} (e^x + k) = 1 + k \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} (1 - x^2) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow 1 + k = 1 \Longrightarrow k = 0$$

Si $k \neq 0$ la función es discontinua en $x = 0$.
Continuidad en $x = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 3^-} (1 - x^2) = -8 \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{array} \right. \Longrightarrow$$

En $x = 3$ la función es siempre discontinua, en resumen: Si $k = 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Si $k \neq 0$ f es continua en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

b) Con $k = 0$:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} e^x\, dx = e^x \Big]_{-1}^{0} = 1 - e^{-1}$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} f(x)\, dx = \int_{0}^{1} (1 - x^2)\, dx = x - \frac{x^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 - e^{-1} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{e} \simeq 1,3\ u^2$$

Problema 4 *(2 puntos)* De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0,60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0,30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0,15. Seleccionado un niño al azar de esta región.

a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.

b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Solución:

Sea V el suceso juega con consola de videojuegos más tiempo del recomendado y F el suceso fracaso escolar.
$P(V) = 0,6 \Longrightarrow P(\overline{V}) = 0,4$, $P(F|V) = 0,30$ y $P(F|\overline{V}) = 0,15$

$$P(F|V) = 0,30 = \frac{P(F\cap V)}{P(V)} \Longrightarrow P(F\cap V) = 0,30\cdot 0,6 = 0,18$$
$$P(F|\overline{V}) = 0,15 = \frac{P(F\cap \overline{V})}{P(\overline{V})} \Longrightarrow P(F\cap \overline{V}) = 0,15\cdot 0,4 = 0,06$$

Voy a resolver este problema organizando los valores en una tabla de intersecciones:

	Sucesos		
	V	$\overline{V}$	Totales
F	0,18	0,06	
$\overline{F}$			
Totales	0,6	0,4	1

$\Longrightarrow$

	Sucesos		
	V	$\overline{V}$	Totales
F	0,18	0,06	0,24
$\overline{F}$	0,42	0,34	0,76
Totales	0,6	0,4	1

a) $P(F) = 0,24$

b) $P(\overline{V}|F) = \dfrac{P(\overline{V}\cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,06}{0,24} = 0,25$

Problema 5 *(2 puntos)* El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1,5$ kilogramos.

a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0,49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.

b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5,75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

Solución:

$$N(\mu; 1,5)$$

a) $2E = 0,49 \Longrightarrow E = 0,245$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1,5}{\sqrt{n}} = 0,245 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,5 \cdot 1,96}{0,245}\right)^2 = 144 \Longrightarrow$$

$$n = 144$$

b) $\mu = 6$, $\sigma = 1,5$ y $n = 225$.

$$P(\overline{X} \geq 5,75) = P\left(Z \geq \frac{5,75-6}{1,5/\sqrt{225}}\right) = P(Z \geq -2,5) =$$

$$1 - P(Z \leq -2,5) = 1 - (1 - P(Z \leq 2,5)) = P(Z \leq 2,5) = 0,9938$$