Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coincidente-Junio 2019) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + (a+2)z = 1 \\ x + y + az = 0 \\ (a-1)x + 2z = a + 1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuélvase para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a-1 & 0 & 2 & a+1 \end{array} \right); \quad |A| = a^2 - 3a = 0 \Longrightarrow a = 0, \quad a = 3$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 4F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

b) Si $a = 2$

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + 4z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 2z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se consideran las funciones reales de variable real

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + 5x + 20; \quad g(x) = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

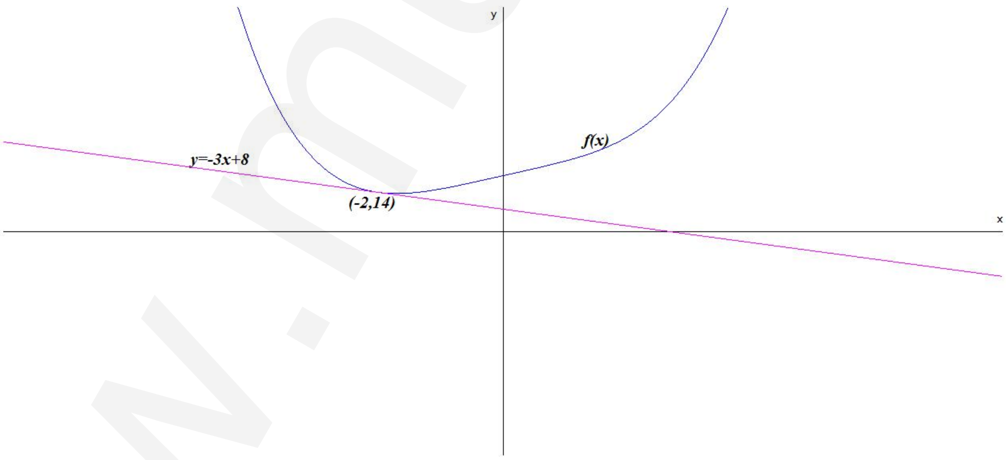
a) Hállese el punto en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente -3 y determínese la ecuación de esta recta tangente.

b) Calcúlese el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de g, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y el eje OX sea igual a $2\ u^2$.

Solución:

a) $f'(x) = x^3+5 \Longrightarrow m = f'(a) = a^3+5 = -3 \Longrightarrow a^3 = -8 \Longrightarrow a = -2$ y el punto de tangencia es $(a, f(a)) = (-2, f(-2)) = (-2, 14)$:

$$y - 14 = -3(x+2) \Longrightarrow y = -3x + 8$$



b)

$$\int_0^1 \left(\frac{ax}{x^2+1} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx = \frac{a}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{(x+1)}\Big]_0^1 =$$

$$\frac{a\ln 2 + 1}{2} = 2 \Longrightarrow a = \frac{3}{\ln 2} \simeq 4,33$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

a) Determínense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Obténganse los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

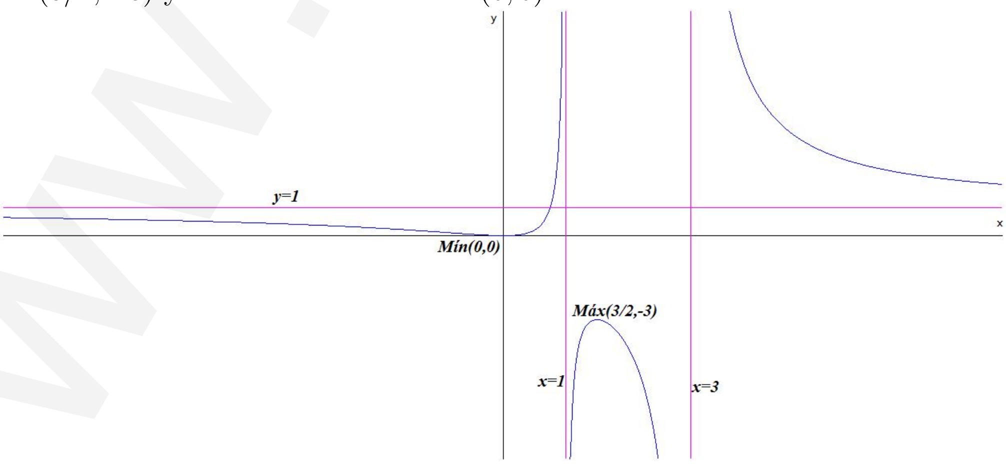
a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$ y Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 1$:
  $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$
  En $x = 3$:
  $$\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$
- Horizontales: $y = 1$
  $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1$$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{2x(2x-3)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 3/2$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3/2)$	$(3/2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, 3/2)$, y es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (3/2, 3) \cup (3, +\infty)$. Tiene un máximo relativo en $(3/2, -3)$ y un mínimo relativo en $(0, 0)$



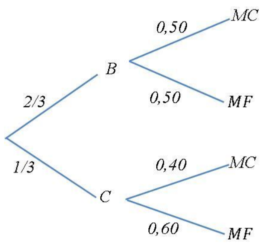
Problema 4 *(2 puntos)* En una panadería se elabora pan de dos tipos: blanco y cereales. Uno de cada tres panes es de cereales. Un pan blanco tiene la misma probabilidad de estar elaborado con masa congelada que con masa fresca, mientras que la probabilidad de que un pan de cereales se elabore con masa fresca es de 0,6. Se elige un pan al azar. Determínese la probabilidad de que:

a) Esté elaborado con masa fresca.

b) Sea de cereales sabiendo que está elaborado con masa congelada.

Solución:

Sea B pan blanco, C pan de cereales, MC masa congelada y MF masa fresca.



a) $P(MF) = P(MF|B)P(B) + P(MF|C)P(C) = \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,6 = 0,5\widehat{3}$

b) $P(C|MC) = \frac{P(MC|C)P(C)}{P(MC)} = \frac{0,4 \cdot \frac{1}{3}}{1 - 0,5\widehat{3}} = 0,2857$

Problema 5 *(2 puntos)* El tiempo que dura una sesión de rehabilitación de hombro, en minutos (min), se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 10$ min.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 5 min, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Supóngase que $\mu = 40$ min. Calcúlese el tamaño que debe tener una muestra aleatoria simple para que $P(\overline{X} \leq 38) = 0,1587$.

Solución:
$N(\mu; 10)$

a) $E = 5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{10}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 10}{5}\right)^2 = 15,3664 \Longrightarrow$$

$$n = 16$$

b) $\mu = 40 \Longrightarrow \overline{X} \approx \left(40, \frac{10}{\sqrt{n}}\right)$

$$P(\overline{X} \leq 38) = P\left(Z \leq \frac{38-40}{10/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \leq \frac{-2\sqrt{n}}{10}\right) =$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0,1587 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0,8413 \Longrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{n}}{5} = 1 \Longrightarrow n = 25$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Coincidente-Junio 2019) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considérense las matrices A, B y C siguientes, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

a) Determínense los valores de a, b y c para que se verifique

$$C \cdot A = B \cdot C \text{ y } |C| = 2$$

Nota: $|C|$ es el determinante de la matriz C.

b) Calcúlese, para los valores $a = b = c = 1$, $C^{-1} \cdot B \cdot C$ y B^{100}.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 6+2a & 6+2a \\ -3b+2c & -3b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & -c \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 6+2a = 0 \\ -3b+2c = -b \\ -3b+2c = -c \\ |C| = -2c - ab = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

b) $a = b = c = 1 \Longrightarrow C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$$C^{-1}{\cdot}B{\cdot}C = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$B^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, luego

$$B^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si} \quad n \text{ par} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si} \quad n \text{ impar} \end{cases} \Longrightarrow B^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Para el mantenimiento de las piscinas de cierto hotel se quiere utilizar cloro de disolución lenta (CL) y cloro estabilizado (CE). El hotel quiere que la cantidad de cloro que se use en la temporada de verano, sea como mucho 500 kg y la cantidad de cloro de disolución lenta sea mayor que la cantidad de cloro estabilizado al menos en 100 kg. No podrán utilizarse más de 350 kg de cloro de disolución lenta ni menos de 100 kg de cloro estabilizado. Cada kg de cloro de disolución lenta cuesta 30 euros, mientras que cada kg de cloro estabilizado cuesta el doble.

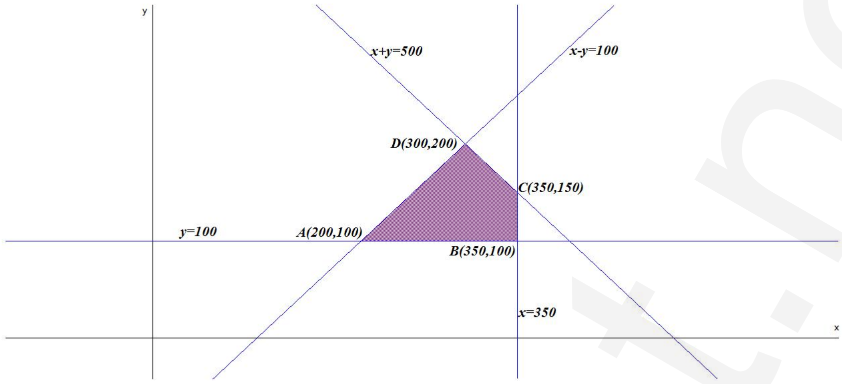
a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) Se desea que el gasto, respetando las características anteriores, sea el mínimo posible. Determínense las cantidades de cloro de cada tipo que deben usarse para minimizar los costes. Obténgase el valor del coste mínimo.

Solución:
x: Kg de cloro de disolución lenta (CL) e y kg de cloro estabilizado (CE).

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 30x + 60y$ calculando su mínimo,, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + y \le 500 \\ x \ge y + 100 \\ x \le 350 \\ y \ge 100 \\ x \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \le 500 \\ x - y \ge 100 \\ x \le 350 \\ y \ge 100 \\ x \ge 0 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $A(200,100)$, $B(350;100)$, $C(350,150)$ y $D(300,200)$:

b)

$$\begin{cases} f(200,100) = 12000 \text{ Mínimo} \\ f(350;100) = 16500 \\ f(350,150) = 19500 \\ f(300,200) = 21000 \end{cases}$$

El mínimo gasto es de 12000 euros y se alcanza con el consumo de 200 kg de de disolución lenta (CL) y 100 kg de cloro estabilizado (CE).

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - a}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga tangente horizontal en $x = 3$.

b) Hállense las asíntotas de $f(x)$ para $a = 4$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 3a)}{(x^2 - a)^2}$ como $f'(3) = 0 \Longrightarrow \dfrac{9(9 - 3a)}{(9 - a)^2} = 0 \Longrightarrow a = 3$

b) Si $a = 4 \Longrightarrow \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$. Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = -2$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{-8}{0^+}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{-8}{0^-}\right] = +\infty$$

  En $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^3-4x}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0$$

$$y=x$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A|B)=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{1}{6}$ y $P(A)=\frac{2}{3}$
Calcúlese:

a) $P(\overline{B}\cup\overline{A})$

b) $P(\overline{A}\cap B)$

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) $P(\overline{B}\cup\overline{A})=P(\overline{B\cap A})=1-P(A\cap B)=1-(P(B|A)P(A))=$

$1-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$, $\quad\left(P(A\cap B)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{9}\right)$

b) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\Longrightarrow P(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A|B)}$

$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A|B)}-P(A\cap B)=\dfrac{1/9}{1/4}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$

Problema 5 *(2 puntos)* En la zona centro de una ciudad, el alquiler mensual de los locales comerciales se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y desviación típica σ euros.

a) Suponiendo $\mu = 3000$ euros, determínese σ para que al elegir una muestra aleatoria simple de tamaño 49, la probabilidad de que el alquiler medio mensual de la muestra supere los 3125 euros sea $0,20$.

b) Suponiendo una desviación típica poblacional igual a 1000 euros y el valor de μ desconocido, determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ, basado en la información de una muestra aleatoria simple de 100 locales comerciales en la que se observó un alquiler mensual medio de 3300 euros.

Solución:

$$N(\mu;\sigma)$$

a) $\mu = 3000$ y $n = 49$. $\overline{X} \approx N\left(3000, \dfrac{\sigma}{\sqrt{49}}\right) = N\left(3000, \dfrac{\sigma}{7}\right)$

$$P(\overline{X} \geq 3125) = P\left(Z \geq \frac{3125 - 3000}{\sigma/7}\right) = P\left(Z \geq \frac{875}{\sigma}\right) =$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{875}{\sigma}\right) = 0,20 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{875}{\sigma}\right) = 0,8 \Longrightarrow$$

$$\frac{875}{\sigma} = 0,845 \Longrightarrow \sigma = 1035,5$$

b) $\sigma = 1000$, $n = 100$, $\overline{X} = 3300$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{1000}{10} = 196$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (3300 - 196, 3300 + 196) = (3104, 3496)$$