Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Mayo 2019

Problema 1 *(2,5 puntos)*Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2ax-7b}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ bx - 3 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ \frac{2ax+b}{2} & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} 2ax - 7b2 = \dfrac{-2a-7b}{2} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} (bx-3) = -b-3 \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{-2a-7b}{2} = -b-3 \Longrightarrow 2a+5b = 6$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} (bx-3) = b-3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{2ax+b}{2} = \dfrac{2a+b}{2} \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{2a+b}{2} = b-3 \Longrightarrow 2a-b = -6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + 5b = 6 \\ 2a - b = -6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -2 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2bx + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3bx^2 - 3ax + 1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (ax^2 - 2bx + 2) = a - 2b + 2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (3bx^2 - 3ax + 1) = 3b - 3a + 1$$

$$a - 2b + 2 = 3b - 3a + 1 \Longrightarrow 4a - 5b = -1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 6bx - 3a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$f'(1^-) = 2a - 2b$; $f'(1^+) = 6b - 3a \Longrightarrow 2a - 2b = 6b - 3a \Longrightarrow 5a - 8b = 0$

$$\begin{cases} 4a - 5b = -1 \\ 5a - 8b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -8/7 \\ b = -5/7 \end{cases}$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1}$$

a) Calcúlense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) Asíntotas:

- **Verticales:**
  $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

  $x = -3$

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = \left[\frac{-4}{0^-}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales b)

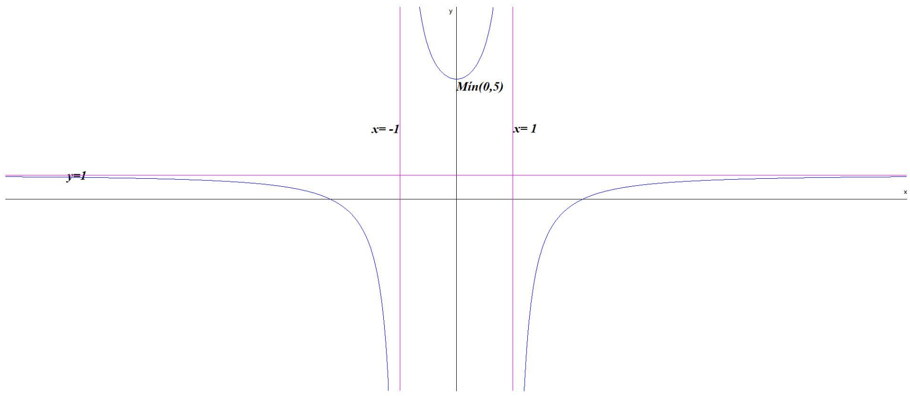
$$f'(x) = \frac{8x}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

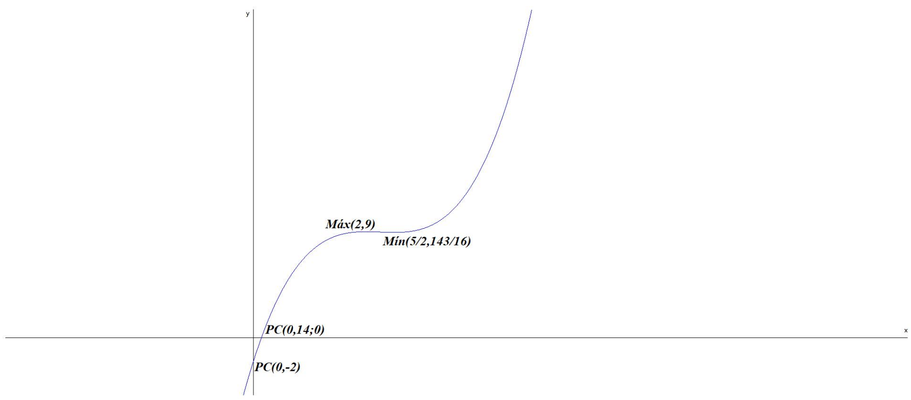
La función es decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

La función tiene un mínimo en $(0, 5)$.



Problema 4 *(2,5 puntos)*Dada la función $f(x) = x^3 + 2ax^2 - 3bx + c$, encontrar los valores de a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, -2)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 9)$. Decidir de que extremo se trata.

Solución:



$$f(x)=x^3+2ax^2-3bx+c \Longrightarrow f'(x)=3x^2+4ax-3b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=-2 \Longrightarrow c=-2 \\ f(2)=9 \Longrightarrow 8+8a-6b+c=9 \\ f'(2)=0 \Longrightarrow 12+8a-3b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-27/8 \\ b=-5 \\ c=-2 \end{array}\right.$$

La función pedida es: $f(x)=x^3-\frac{27}{4}x^2+15x-2$
$f'(x)=3x^2-\frac{27}{2}x+15=0 \Longrightarrow x=2,\ x=5/2$ y $f''(x)=6x-\frac{27}{2} \Longrightarrow f''(2)=-\frac{3}{2}<0 \Longrightarrow$ el extremo que hay en el punto $(2,9)$ es un máximo. Por el contrario, en el punto $\left(\frac{5}{2},\frac{143}{16}\right)$ tendríamos $f''\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}>0 \Longrightarrow$ el extremo que hay en ese punto es un mínimo.