Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Marzo 2019

Problema 1 *(2,5 puntos)* La función de beneficio (en euros) de una empresa que fabrica cables de electricidad viene dada por la función

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200$$

donde x representa la cantidad de metros de cable elaborados diariamente.

a) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que la empresa no tenga ganancias ni pérdidas?

b) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que se obtenga el máximo beneficio?

(Observación: valores negativos de $b(x)$ implican que la empresa tiene pérdidas, mientras que valores positivos implican ganancias)
(Septiembre 2017 (coincidente) - Opción B)
Solución:

a) $b(x) = -x^2 + 120x - 3200 = 0 \Longrightarrow x = 40$ m y $x = 80$ m.

b) $b'(x) = -2x + 120 = 0 \Longrightarrow x = 60$ para comprobar si es un máximo recurrimos a la segunda derivada: $b''(x) = -2 \Longrightarrow b''(60) = -2 < 0 \Longrightarrow$ hay un máximo cuando se producen 60 m con un beneficio de $b(60) = 400$ euros.

Problema 2 *(2,5 puntos)* Se considera la función real de variable real definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 + a & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ bx + 1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

a) Determínense los valores que deben tomar los parámetros reales a y b para que f sea continua en toda la recta real.

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = -1$.

(Junio 2015 (coincidente)- Opción B)
Solución:

a) $\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{x+1}{x-1} = -1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} (x^2+a) = a \end{cases} \Longrightarrow a = -1.$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} (x^2+a) = 4+a \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} (bx+1) = 2b+1 \end{cases} \Longrightarrow 4+a = 2b+1 \Longrightarrow$
$a - 2b = -3.$

$\begin{cases} a = -1 \\ a - 2b = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$

b) En $x = -1$ $b = f(-1) = 0 \Longrightarrow$ el punto de tangencia es el $(-1, 0)$. $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} \Longrightarrow$ la pendiente de la recta es $m = f'(-1) = -1/2$. La recta tangente es: $y = -\frac{1}{2}(x+1)$ en su ecuación punto pendiente.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 4x^3 - ax^2 - ax + 2$, $a \in R$.

a) Determínese el valor del parámetro real a para que la función alcance un extremo relativo en $x = 1/2$. Compruébese que se trata de un mínimo.

b) Para $a = 2$, calcúlese el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(Septiembre 2015 - Opción A)
Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 2ax - a$:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - a - a = 0 \Longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

$f''(x) = 24x^2 - 2a = 24x - 3$:

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - 3 = 9 > 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ Mínimo}$$

b)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (4x^3 - 2x^2 - 2x + 2)\,dx = x^4 - \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x\Big]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2. Calcúlense las dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana. (Septiembre 2010 - Opción A)

Solución:

LLamamos x a la longitud del lado horizontal e y a la longitud del lado vertical.

$$x \cdot y = 2 \Longrightarrow y = \frac{2}{x}, \ \ p(x,y) = 2x + 2y$$

$$C(x,y) = 50(x + 2y) \Longrightarrow C(x) = 50\left(x + \frac{4}{x}\right) = \frac{50(x^2+4)}{x}$$

$$C'(x) = \frac{50(x^2-4)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 2, \quad x = -2$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$C'(x)$	$+$	$-$	$+$
$C(x)$	creciente	decreciente	creciente

El mínimo estaría en el punto $x = 2$, es decir, el coste mínimo sería de 200 euros y correspondería a unas dimensiones de 2 metros de lado horizontal y 1 metro de lado vertical.