Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2019

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dada la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} ax + 6 & \text{si} \quad x \le -1 \\ bx^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad -1 < x \le 2 \\ \dfrac{x-5}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en $x = -1$ y $x = 2$.
(Junio 2014 - Opción A Cantabria)
Solución:
Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} (ax + 6) = -a + 6 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} (bx^2 - 2x + 1) = b + 3 \end{array} \right. \Longrightarrow -a + 6 = b + 3 \Longrightarrow a + b = 3$$

Continuidad en $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} (bx^2 - 2x + 1) = 4b - 3 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \dfrac{x-5}{(x+1)^2} = \dfrac{-1}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow 4b - 3 = \frac{-1}{3} \Longrightarrow b = \frac{2}{3} \Longrightarrow a = \frac{7}{3}$$

Problema 2 *(5 puntos)* Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 5$

b) Estudiar y representar gráficamente la función f. Calcular el área limitada por la curva y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución:

a) $F(x) = \int (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + C$.
$F(2) = 5 \Longrightarrow F(1) = \dfrac{16}{4} - 16 + 16 + C = 5 \Longrightarrow C = 1$ luego la función es $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + 1$.

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow$ $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(4, 0)$ con OX.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.

Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8 = 0 \Longrightarrow x = 2 \pm \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

	$(-\infty, 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3})$	$(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3})$	$(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

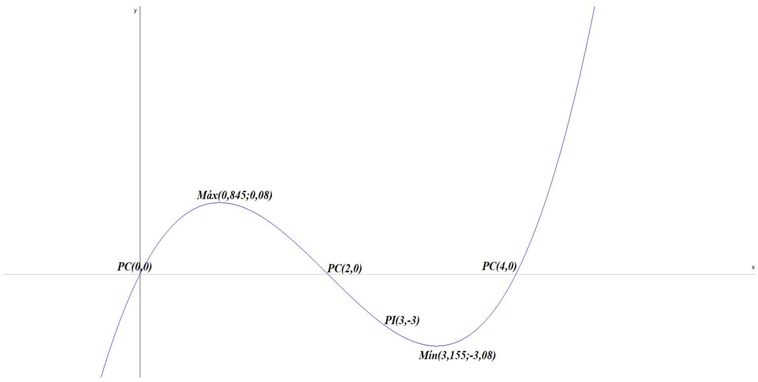
La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$.

La función es decreciente en el intervalo $\left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

La función tiene un máximo en $\left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{9}\right) = (0,845; 0,08)$ y un mínimo en $\left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-16\sqrt{3}}{9}\right) = (3,155; -3,08)$.
Curvatura: $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 3$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\bigcap$	cóncava $\bigcup$

f convexa en $(-\infty, 3)$ y cóncava en $(3, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(3, -3)$.



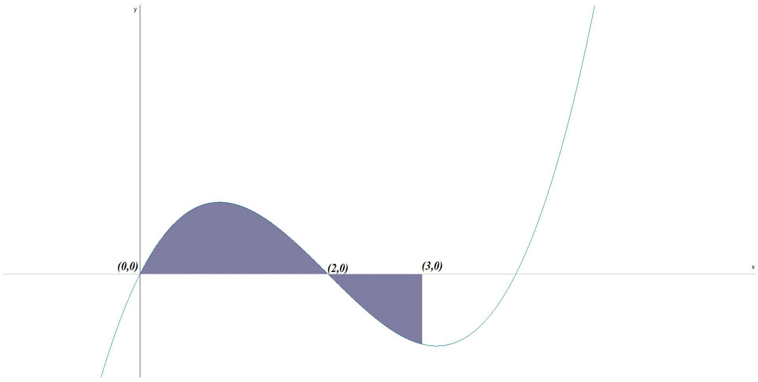
c)

$$F(x) = \int (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2$$

$$S_1 = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx = F(2) - F(0) = 4$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = F(3) - F(2) = -\frac{7}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4 + \frac{7}{4} = \frac{25}{4}\ u^2$$



Problema 3 *(5 puntos)* Dada la función $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$

a) Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

d) Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = -4x$.

e) Calcular el área de la región anterior.

Solución:

a) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow$ $(0,0)$, $(-1,0)$ y $(2,0)$ con OX.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

	$(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$.

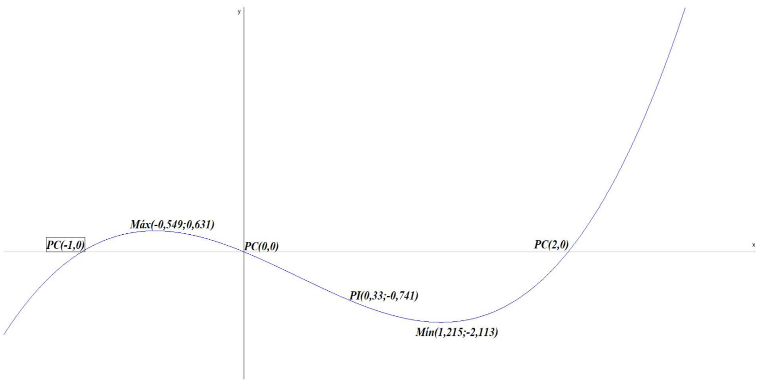
La función es decreciente en el intervalo $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$.

La función tiene un máximo en $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-20+14\sqrt{7}}{27}\right) = (-0,549; 0,631)$ y un mínimo en $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \frac{-20-14\sqrt{7}}{27}\right) = (1,215; -2,113)$.

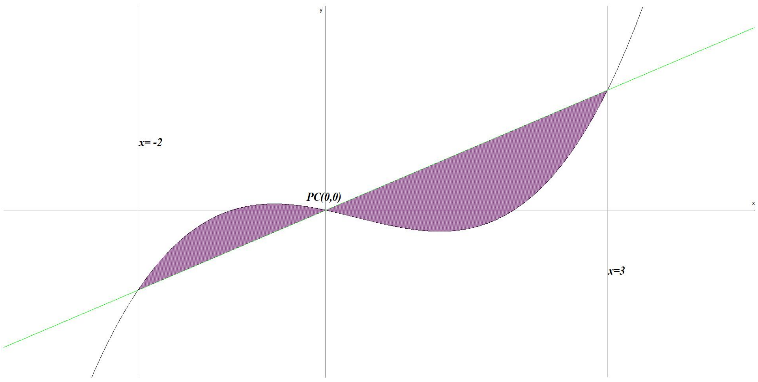
c) $f''(x) = 6x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\bigcap$	cóncava $\bigcup$

f convexa en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y cóncava en $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{3}, -\frac{20}{27}\right) = (0,33; -0,741)$.



d) $x^3 - x^2 - 2x = 4x \Longrightarrow x = -2,\ x = 0$ y $x = 3$.



e)

$$F(x) = \int (x^3 - x^2 - 2x - 4x)\, dx = \int (x^3 - x^2 - 6x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2$$

$$S_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)\, dx = F(0) - F(-2) = \frac{16}{3}$$

$$S_2 = \int_{0}^{3} (x^3 - x^2 - 6x)\, dx = F(3) - F(0) = -\frac{63}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \frac{253}{12}\ u^2 = 21,083\ u^2$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*

a) Calcule el valor del parámetro a que hace que el valor de la derivada de la función $y = 2x^3 + 3ax^2 + ax - 18$, en los puntos de abcisa $x = -1$ y $x = 2$ sean iguales.

b) Sabiendo que $y = 2x^3 + 3ax^2 + ax - 18$ pasa por el punto $(2, 12)$, calcúlese el valor de a y las coordenadas del punto de la curva donde se anula la segunda derivada.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 6ax + a$ y $f'(-1) = f'(2) \Longrightarrow 6 - 5a = 13a + 24 \Longrightarrow a = -1$

b) $f(2) = 12 \Longrightarrow 16 + 12a + 2a - 18 = 12 \Longrightarrow a = 1$ la función es $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 18 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 + 6x + 1 \Longrightarrow f''(x) = 12x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -1/2 \Longrightarrow (-1/2, -18)$