Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2019

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) Determínese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

(Septiembre 2017 (coincidente) - Opción A)

Solución:

a) Continuidad en $x = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} (x^2 - 2x) = 3 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} (x) = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{discontinuidad no evitable}$$

Continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} (x) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} (-x^2 + 2x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{es continua}$$

Luego f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) La función no corta al eje de abcisas en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$ Serán dos áreas a estudiar, S_1 en el intervalo $(0, 1)$ y S_2 en el $(1, 2)$.

$$S_1 = \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \int_1^2 (-x^2 + 2x)\,dx = \left.-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}\ u^2$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}$$

a) Estúdiense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

(Septiembre 2017 - Opción B)
Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 2/3$:

$$\lim_{x\longrightarrow(2/3)^-} \frac{x^2-1}{3x-2} = \left[\frac{-5/9}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{3x-2} = \left[\frac{-5/9}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{3x-2} = \infty; \quad \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x^2-1}{3x-2} = -\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{3x^2-2x} = \frac{1}{3}$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2-1}{3x-2} - \frac{x}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

  Luego la asíntota oblicua es $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{9}$

b) $f'(x) = \dfrac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2} = 0 \Longrightarrow 3x^2-4x+3 = 0$ no tiene solución y $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} - \{2/3\} \Longrightarrow f$ creciente en $\mathbb{R} - \{2/3\}$.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 5x+1 & \text{si} & x \le 0 \\ x^2+5x+1 & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

a) Determínese si la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

(Junio 2017 (coincidente) - Opción B)
Solución:

a) Para que sea derivable tiene que ser continua:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} (5x+1) = 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} (x^2+5x+1) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Luego f es continua en $x = 0$. Comprobamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \le 0 \\ 2x+5 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = 5$$

Luego f es derivable en $x = 0$.

b) En $x = 3 \Longrightarrow f(x) = x^2 + 5x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 2x + 5$
$b = f(3) = 25$, $m = f'(3) = 11$. La ecuación de la recta tangente es:
$y - 25 = 11(x - 3)$ (ecuación punto pendiente)

Problema 4 *(2,5 puntos)* La función de beneficio (en euros) de una empresa que fabrica cables de electricidad viene dada por la función

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200$$

donde x representa la cantidad de metros de cable elaborados diariamente.

a) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que la empresa no tenga ganancias ni pérdidas?

b) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que se obtenga el máximo beneficio?

(Observación: valores negativos de $b(x)$ implican que la empresa tiene pérdidas, mientras que valores positivos implican ganancias)
(Septiembre 2017 (coincidente) - Opción B)
Solución:

a) $b(x) = -x^2 + 120x - 3200 = 0 \Longrightarrow x = 40$ m y $x = 80$ m.

b) $b'(x) = -2x + 120 = 0 \Longrightarrow x = 60$ para comprobar si es un máximo recurrimos a la segunda derivada: $b''(x) = -2 \Longrightarrow b''(60) = -2 < 0 \Longrightarrow$ hay un máximo cuando se producen 60 m con un beneficio de $b(60) = 400$ euros.