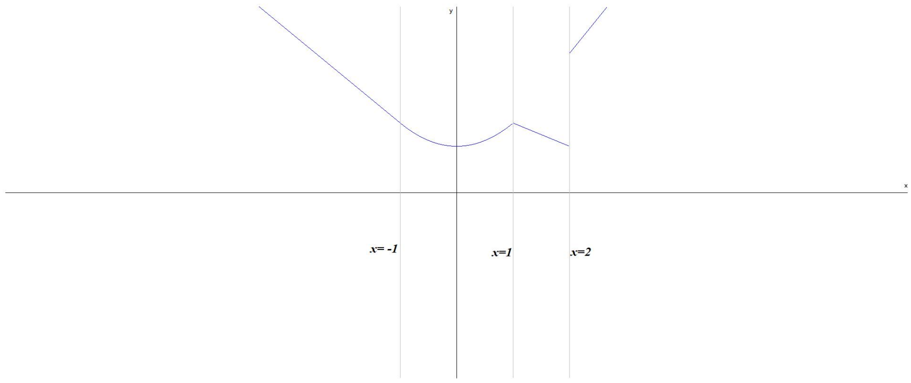
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2019

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2+2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 7 & \text{si} \quad x = 1 \\ -x+4 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 3x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 5ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - ax + 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (5ax^2 - bx + 1) = 5a - b + 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (bx^2 - ax + 3) = b - a + 3$$

$$5a - b + 1 = b - a + 3 \Longrightarrow 3a - b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 10ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 10a - b; \;\; f'(1^+) = 2b - a \Longrightarrow 10a - b = 2b - a \Longrightarrow 11a - 3b = 0$$

$$\begin{cases} 3a - b = 1 \\ 11a - 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3/2 \\ b = -11/2 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax+5b}{3} & \text{si} & x < -1 \\ 2bx - 3 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2ax-b}{6} & \text{si} & x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{ax+5b}{3} = \dfrac{-a+5b}{3} \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} (2bx - 3) = -2b - 3 \end{cases} \Longrightarrow \frac{-a+5b}{3} = -2b-3 \Longrightarrow a - 11b = 9$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} (2bx - 3) = 2b - 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{2ax-b}{6} = \dfrac{2a-b}{6} \end{cases} \Longrightarrow \frac{2a-b}{6} = 2b-3 \Longrightarrow 2a - 13b = -18$$

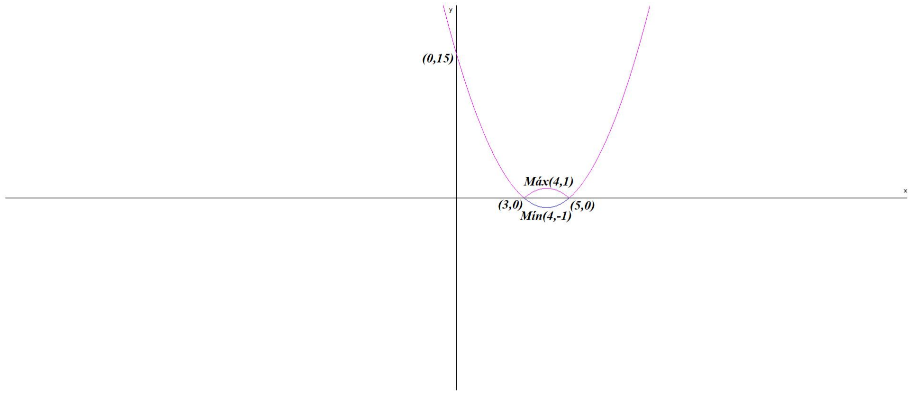
$$\begin{cases} a - 11b = 9 \\ 2a - 13b = -18 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -35 \\ b = -4 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 8x + 15|$ y representarla gráficamente.

Solución:

Hacemos $g(x) = x^2 - 8x + 15 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = 4$:

x	y
0	15
3	0
5	0
4	-1



$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(4) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $(4, -1)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $(2, 9)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 15 & \text{si} \quad x \le 3 \\ -(x^2 - 8x + 15) & \text{si} \quad 3 < x \le 5 \\ x^2 - 8x + 15 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} (x^2 - 8x + 15) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} (-x^2 + 8x - 15) = 0$$

$$f(3) = 0$$

Y f es continua en $x = 5$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} (-x^2 + 8x - 15) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} (x^2 - 8x + 15) = 0$$

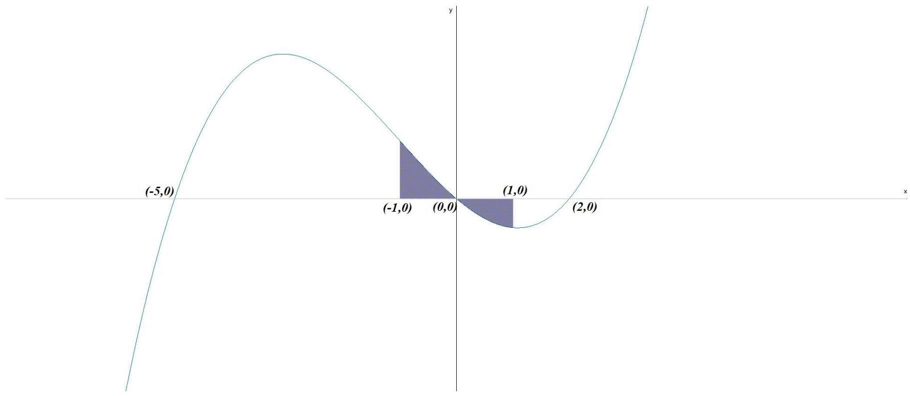
$$f(5) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 8 & \text{si} \quad x \le 3 \\ -2x + 8 & \text{si} \quad 3 < x \le 5 \\ 2x - 8 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -2$ y $f'(3^+) = 2$, luego no es derivable en $x = 3$.
Derivabilidad en $x = 5$: $f'(5^-) = -2$ y $f'(5^+) = 2$, luego no es derivable en $x = 5$.

Resumiendo: La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 5\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$, encontrar el área encerrada por ella, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
Solución:



$$x^3 + 3x^2 - 10x = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = -5 \text{ y } x = 2$$

Tendremos dos áreas a calcular S_1 con los límites de integración entre -1 y 0, y otra S_2 entre 0 y 1.

$$F(x) = \int (x^3 + 3x^2 - 10x)\, dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x^2$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\, dx = F(0) - F(-1) = \frac{23}{4}, \;\; S_2 = \int_{0}^{1} f(x)\, dx = F(1) - F(0) = -\frac{15}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{23}{4} + \frac{15}{4} = \frac{19}{2}\; u^2$$