Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2018

Problema 1 *(2,5 puntos)* Se pide:

1. (1 punto) Determinar para que valores de a la siguiente matriz no tiene inversa
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5-a & -2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

2. (1,5 puntos) Considerando la matriz A del apartado anterior con $a = -1$, resolver la ecuación matricial $XA+B = CA$, donde $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Junio 2014 - Opción A (Cantabria))

Solución:

1. $|A| = a(11-a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 11$ La matriz será invertible para cualquier valor de $a \in \mathbb{R} - \{0, 11\}$ y no será invertible para $a = 0$ y $a = 11$.

2. Para $a = -1$:
$XA + B = CA \Longrightarrow X = (CA - B)A^{-1}$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -5/6 \end{pmatrix},$$
$$CA - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$X = (CA - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -5/6 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & -17/6 \\ 3 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Después de aplicar un descuento del 10 % a cada uno de los precios originales, se ha pagado por un rotulador, un cuaderno y una carpeta 3,96 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad

del precio del rotulador y que el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20 % del precio del rotulador. Calcula el precio original de cada objeto.
(Junio 2014 - Opción B (Comunidad Valenciana))
Solución:
LLamamos x al precio original del rotulador, y el del cuaderno y z el de la carpeta.

$$\left\{\begin{array}{l} 0,9(x+y+z)=3,96\\ y=x/2\\ z=y+0,2x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=1\\ z=1,4 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+az=2\\ 3x+4y+2z=a\\ 2x+3y-z=1 \end{array}\right.$$

1. Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
2. Resuélvase el sistema en el caso $a=-1$.

(Junio 2014 - Opción B (Comunidad de Madrid))
Solución:

1. $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & a & 2\\ 3 & 4 & 2 & a\\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right);\quad |A|=a-3=0\Longrightarrow a=3$$

   - Si $a\neq 3\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
   - Si $a=3$:

     $$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right);\quad |A|=0,\quad \left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 3 & 4 \end{array}\right|=1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

     Como $F_3=F_2-F_1\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=2$. Como $\text{Rango}(A)=\text{Rango}(\overline{A})<$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2. Si $a=-1$:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y-z=2\\ 3x+4y+2z=-1\\ 2x+3y-z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3\\ y=-2\\ z=-1 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Se pide:

1. (1,5 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ determinar los valores de a y b de manera que la matriz verifique que $A^2 = A$.

2. (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ calcular la matrz X para que cumpla la ecuación $AX - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde I es la identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Junio 2014 - Opción A (Islas Baleares))

Solución:

1. $A^2 = A \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow$

   $$\begin{pmatrix} 4-a & 2a+ab \\ -2-b & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 4-a=2 \Longrightarrow a=2 \\ 2a+ab=a \\ -2-b=-1 \Longrightarrow b=-1 \\ -a+b^2=b \end{cases}$$

   valores que cumplen las dos ecuaciones restantes $\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   $AX - 2I = O \Longrightarrow AX = O + 2I \Longrightarrow AX = 2I \Longrightarrow X = A^{-1}2I = 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$