Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2018

Problema 1 *(2,5 puntos)* De pide:

1. (1,5 puntos) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz X para la que se verifica la ecuación matricial $XA^2 = B$.

2. (1 punto) Hallar la matriz A^{17}. Razona el procedimiento.

(Junio 2014 - Opción A (País Vasco))
Solución:

1. $XA^2 = B \Longrightarrow X = B(A^2)^{-1}$
$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$X = B(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,
$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$A^{17} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & -1 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Pablo, Julia y María han comprado un regalo. Julia ha gastado la mitad de dinero que María, y Pablo ha gastado el triple que Julia.

1. (1 punto) Explique razonadamente si con estos datos basta para determinar cuánto ha gastado cada uno.

2. (1,5 puntos) Si además nos dicen que entre los tres han gastado 63 euros, ¿cuánto ha gastado cada uno?

(Junio 2014 - Opción A (Cataluña))
Solución:

1. LLamamos x al dinero gastado por Pablo, y al gastado por Julia y z al gastado por María.
   $\begin{cases} y = z/2 \\ x = 3y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Longrightarrow$ se trata de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas y sería compatible indeterminado, nos faltaría una ecuación.

2. $\begin{cases} 2y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ x + y + z = 63 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 31,5 \\ y = 10,5 \\ z = 21 \end{cases}$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Discutir el siguiente sistema por el método de Gauss, según los valores del parámetro a, siendo a un número real distinto de 0.

$$\begin{cases} ax + y - 2az = 1 \\ ax - y = 2 \\ ax + y + (a-1)z = 3a - 1 \end{cases}$$

Resolverlo para $a = 1$
(Junio 2014 - Opción A (Murcia))
Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} a & 1 & -2a & 1 \\ a & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & a-1 & 3a-1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} a & 1 & -2a & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3a-1 & 3a-2 \end{array}\right)$$

- $3a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1/3$, $3a - 2 = 0 \Longrightarrow a = 2/3$ luego el sistema no puede ser compatible indeterminado.
- Para $a = 1/3$ es $3a - 2 = 3(1/3) - 2 = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ el sistema sería incompatible.
- Si $a \neq 1/3$ el sistema es compatible determinado.

Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine x para que se verifique la ecuación $A^2 - 6A + 5I = O$, donde $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(Junio 2014 - Opción A (Cataluña))

Solución:

$A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$

$A^2 - 6A + 5I = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 6x + 5 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 5 \end{pmatrix} =$

$x^2 - 6x + 5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x^2 - 6x + 5 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 5$