Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2018

Problema 1 *(2,5 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

1. (1 punto) Obtenga la matriz A^{2014}.
2. (1,5 puntos) Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = 0$.

(Junio 2014 - Opción A (Andalucía))

Solución:

1. $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 2014a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Si $a = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$A^3 \cdot X - 4B = 0 \Longrightarrow A^3 \cdot X = 4B \Longrightarrow X = (A^3)^{-1}4B$
$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $4B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$X = (A^3)^{-1}4B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Un bar recibe el pedido de refrescos y cervezas, por el que paga 6 euros, siendo el precio de cada refresco de 20 céntimos de euro y el de cada cerveza de m céntimos de euro. Si se intercambiasen los precios unitarios de los refrescos y las cervezas, habría pagado 6 euros y 50 céntimos.

1. (1,5 puntos) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de refrescos y el número de cervezas adquiridos ese día. ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?
2. (1 punto) ¿Cuántas cervezs habría comprado si cada cerveza costase a 30 céntimos de euro?

(Junio 2014 - Opción A (Asturias))

Solución:

1. x: nº de refrescos e y:nº de cervezas
$\begin{cases} 20x+ & my= & 600 \\ mx+ & 20y= & 650 \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 20 & m & 600 \\ m & 20 & 650 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 400 - m^2 \Longrightarrow m = \pm 20$, la solución negativa no es válida, no tiene sentido.
Si $m \neq 20 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) = 2 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow SCD$ (solución única)
Si $m = 20 \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 20 & 20 & 600 \\ 20 & 20 & 650 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cc|c} 20 & 20 & 600 \\ 0 & 0 & 50 \end{array}\right) \Longrightarrow$
SI el sistema no tiene solución.
En conclusión, si el sistema tiene solución ésta es única y la tendrá siempre que $m \in \mathbb{R} - \{20\}$.

2. $\begin{cases} 20x+ & 30y= & 600 \\ 30x+ & 20y= & 650 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x= & 15 \\ y= & 10 \end{cases} \Longrightarrow$ serían 10 cervezas.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x + y + 3z = 4 \\ 5x - y + az = 10 \end{cases}$$

1. (1,5 puntos) Clasifica el sistema en función de sus posibles soluciones para los distintos valores del parámetro a.

2. (1 punto) Resuelve el sistema para $a = 3$.

(Junio 2014 - Opción A (Castilla-León))

Solución:

1.
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & a & 10 \end{array}\right); \quad |A| = 3a - 33 = 0 \Longrightarrow a = 11$$

- Si $a \neq 11 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 11$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 11 & 10 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 6 & 15 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

2. Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y+z=-1 \\ x+y+3z=4 \\ 5x-y+2z=10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7/3 \\ y=5/3 \\ z=0 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2,5 punto)* Se pide:

1. (1,5 puntos) Encuentrese las matrices que conmutan con la $A = \left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{array}\right)$

2. (1 punto) Escriba la matriz A^T y la matriz A^{-1}.

(Junio 2014 - Opción B (Navarra))

Solución:

1. $AX = XA \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc} 2a+4c & 2b+4d \\ 2c & 2d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 2a & 4a+2b \\ 2c & 4c+2d \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2a+4c=2a \Longrightarrow c=0 \\ 2b+4d=4a+2b \Longrightarrow d=a \\ 2c=2c \Longrightarrow c=c=0 \\ 2d=4c+2d \Longrightarrow c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow X = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array}\right)$$

2. $A = \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{array}\right)$ y $A^{-1} = \left(\begin{array}{rr} 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{array}\right)$