Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Octubre 2018

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -14 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -14 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -14 & -5 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -14 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & m & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & m & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2(m^2 - 3m + 2) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = 2$$

Si $m = 1$ o $m = 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 & 1/4 \\ -3/4 & -3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{1000} = \begin{pmatrix} 2^{999} & 0 & 2^{999} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{999} & 0 & 2^{999} \end{pmatrix}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-b \\ c & c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a+c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b+d = a-b \Longrightarrow a = 2b+d \\ -c = c \Longrightarrow c = 0 \\ -d = c-d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} 2b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.