Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2019

Los problemas fueron propuestos en las pruebas de selectividad de la Comunidad de Madrid en el año 2017. De los seis problemas hay que resolver cinco de ellos, en el caso de que resuelvas los seis ten en cuenta que eliminaré, para la puntuación del examen, el que mejor puntuación tenga.

Problema 1 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.

(Septiembre 2017 - Opción B)
Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,-1,1)\\ P_r(3,2,0)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=3+2\lambda\\ y=2-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_rQ}=(0,3,-3)$

$$d(Q,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rQ}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=2\sqrt{3}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rQ}\times\overrightarrow{u_r}|=|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ 0&3&-3\\ 2&-1&1\end{array}\right||=|(0,-6,-6)|=6\sqrt{2}$$

b) Calculamos $\pi\perp r\Longrightarrow \pi: 2x-y+z+\lambda=0$, imponemos que $Q\in\pi\Longrightarrow 6-5-3+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=2\Longrightarrow \pi: 2x-y+z+2=0$.

Calculamos el punto de corte de r con π: $2(3+2\lambda)-(2-\lambda)+\lambda+2=0\Longrightarrow\lambda=-1\Longrightarrow$ el punto de corte será: $Q'(1,3,-1)$

Problema 2 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine la distancia entre las rectas

$$r_1\equiv x=y=z \ \text{ y } \ r_2\equiv\left\{\begin{array}{l}x+y-1=0\\ x-z+1=0\end{array}\right.$$

b) (1 punto). Obtenga el punto de corte de la recta $s\equiv x=2-y=z-1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

(Junio 2017 - Opción B)
Solución:

a) $r_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,1,1) \\ P_{r_1}(0,0,0) \end{array} \right. \quad r_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (1,-1,1) \\ P_{r_2}(-1,2,0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-1,2,0)$

$$|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]| = \left| \begin{array}{rrr} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = |-2| = 2$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = | \left| \begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| | = |(2,0,2)| = 2\sqrt{2}$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,1) \\ P_s(0,2,1) \end{array} \right.$, un plano $\pi \perp s$ tal que $O \in \pi \Longrightarrow \pi : x - y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 0 - 0 + 0 + \lambda = 0 \Longrightarrow \pi : x - y + z = 0$
El punto de corte de π con s:
$\lambda - (2 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3} \right)$

Problema 3 *(2 puntos)* Dados los puntos $P_1(1,1,3)$, $P_2(0,0,3)$, $P_3(4,-3,1)$ y $O(0,0,0)$. Se pide:

a) (0,5 punto) Hallar el plano π que contiene los puntos P_1, P_2, P_3.

b) (1 punto) Hallar el punto simétrico de O respecto del plano $\pi' \equiv x + y - z + 3 = 0$.

c) (0,5 punto) Hallar el volumen del tetraedro con vértices O, P_1, P_2, P_3.

(Septiembre 2017 (coincidente) - Opción B)
Solución:

a) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_2P_3} = (4,-3,-2) \\ \overrightarrow{P_2P_1} = (1,1,0) \\ P_2(0,0,3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccr} x & y & z-3 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow$

$$2x - 2y + 7z - 21 = 0$$

b) Seguimos el siguiente proceso:

- Calculamos $r \perp \pi' / O \in r \Longrightarrow \overrightarrow{r} = (1, 1, -1)$:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte de r con π':

$$\lambda + \lambda + \lambda + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow O'(-1, -1, 1)$$

- $\dfrac{O + O''}{2} = O' \Longrightarrow O'' = 2O' - O = (-2, -2, 2)$

c) $\overrightarrow{OP_1} = (1, 1, 3)$, $\overrightarrow{OP_2} = (0, 0, 3)$ y $\overrightarrow{OP_3} = (4, -3, 1)$:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \; u^3$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - z = 1 \;\; \text{y} \;\; \pi_2 \equiv x + 2y + z = 3$$

, se pide:

a) (1 punto) Calcular el plano o planos formados por los puntos que equidistan de π_1 y π_2.

b) (1 punto) Calcular la recta paralela a π_1, paralela a π_2 y que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$.

(Septiembre 2017 (coincidente) - Opción A)

Solución:

a) $P(x, y, z)$ tales que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$:

$$\frac{|2x + y - z - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{|x + 2y + z - 3|}{\sqrt{6}} \Longrightarrow |2x+y-z-1| = |x+2y+z-3| \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z - 1 = x + 2y + z - 3 \Longrightarrow \pi_1' : x - y - 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - z - 1 = -x - 2y - z + 3 \Longrightarrow \pi_2' : 3x + 3y - 4 = 0 \end{array} \right.$$

b) La recta paralela a π_1 y π_2 tiene que ser paralela a la intersección de ambos planos.

$$\overrightarrow{u_r} = |\overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}}| = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3, -3, 3) = 3(1, -1, 1)$$

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-1,1)\\ P_r=A(1,-1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$$

Problema 5 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1,-2,1)$, $Q(-4,0,1)$, $R(-3,1,2)$, $S(0,-3,0)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.

b) (1 punto). Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.

c) (0,5 puntos). Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

(Junio 2017 - Opción A)

Solución:

a)

$$\pi:\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(-5,2,0)\\ \overrightarrow{PR}=(-4,3,1)\\ P(1,-2,1)\end{array}\right.\Longrightarrow \pi:\left|\begin{array}{ccc}x-1&y+2&z-1\\ -5&2&0\\ -4&3&1\end{array}\right|=0\Longrightarrow \pi:2x+5y-7z+15=0$$

b)

$$r:\pi:\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{PQ}=(-5,2,0)\\ P_r=P(1,-2,1)\end{array}\right.\quad r:\pi:\left|\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{RS}=(3,-4,-2)\\ P_s=S(0,-3,0)\end{array}\right.\quad \overrightarrow{P_sP_r}=(1,1,1)$$

$$\left|\begin{array}{ccc}1&1&1\\ -5&2&0\\ 3&-4&-2\end{array}\right|=0\Longrightarrow \text{ y Rango}\left(\begin{array}{c}\overrightarrow{u_r}\\ \overrightarrow{u_s}\end{array}\right)=2\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan}$$

c)

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\ -5&2&0\\ -4&3&1\end{array}\right||=\frac{1}{2}|(2,5,7)|=\frac{\sqrt{78}}{2}\ u$$

Problema 6 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(0,0,-3)$, y $P(1,1,1)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo formado por A, B y P.

c) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta que pasa por A y B.

(Modelo 2017 - Opción B)

Solución:

a)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (2,1,4) \\ \overrightarrow{BP} = (1,1,4) \\ B(0,0,-3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x & y & z+3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 4y - z - 3 = 0$$

b)

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BP}| = \frac{1}{2}|\left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right|| = \frac{1}{2}|(0,-4,1)| = \frac{\sqrt{17}}{2}\ u^2$$

c)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BA} = (2,1,4) \\ P_r = B(0,0,-3) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_rP} = \overrightarrow{BP} = (1,1,4)$$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rP}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \sqrt{\frac{17}{21}}\ u$$