Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2019

Problema 1 *(4 puntos).* Sean las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-y+z=3\\ x+y-z=0\end{array}\right. \quad , \quad s:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{1},$$

se pide:

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y calcular la distancia que las separa, el el caso de que crucen.

b) Encontrar una recta vertical a ambas que pase por el punto $P(1,-2,1)$

c) Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.

d) Encontrar una recta que pasando por el punto $P(1,-2,1)$ corte a ambas.

e) Encontrar los puntos de s que distan 5 unidades de $P(1,-2,1)$.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,3,2)\\ P_r(1,0,1)\end{array}\right. \quad , \quad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(2,-1,1)\\ P_s(-1,0,1)\end{array}\right. \quad , \quad \overrightarrow{P_sP_r}=(2,0,0)$$

a)

$$\left[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{array}\right|=10\Longrightarrow \text{se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_t}|=|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\left|\begin{array}{rrr} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{array}\right||=|(5,5,-5)|=|5(1,1,-1)|=5\sqrt{3}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_sP_r},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{10}{5\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\ u$$

b)

$$t:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(1,1,-1)\\ P(1,-2,1)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right.$$

c)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1,3,2) \\ P_r(1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrc} 1 & -1 & x-1 \\ 1 & 3 & y \\ -1 & 2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 5x-y+4z-9=0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,-1,1) \\ P_s(-1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{rrc} 1 & 2 & x+1 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow y+z-1=0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 5x-y+4z-9=0 \\ y+z-1=0 \end{array} \right.$$

d)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_r} = (0,2,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1,3,2) \\ P_r(1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{lrc} 0 & -1 & x-1 \\ 2 & 3 & y \\ 0 & 2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x+z-3=0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_s} = (-2,2,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,-1,1) \\ P_s(-1,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{rrc} -2 & 2 & x+1 \\ 2 & -1 & y \\ 0 & 1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x+y-z+2=0$$

$$l : \left\{ \begin{array}{l} 2x+z-3=0 \\ x+y-z+2=0 \end{array} \right.$$

e)

$$s : \left\{ \begin{array}{l} x = -1+2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \text{llamamos } P_s(x,y,z) \in s$$

$$d(P,s) = |\overrightarrow{P_sP}| = \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2} = 5 \Longrightarrow$$

$$(-2+2\lambda)^2 + (-\lambda+2)^2 + \lambda^2 = 25 \Longrightarrow 6\lambda^2 - 12\lambda - 17 = 0 \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -0,96 \Longrightarrow P_1(-2,92; 0,96; 0,04) \\ \lambda_2 = 2,96 \Longrightarrow P_2(4,92; 2,96; 3,96) \end{array} \right.$$

Problema 2 *(1 puntos).* Se pide:

a) Dados los puntos $P_1(1,2,0)$ y $P_2(-1,0,3)$ encontrar el plano mediador.

b) Dados los planos $\pi_1 : 3x-y+2z-9=0$ y $\pi_2 : 2x+3y+z-1=0$ encontrar los planos bisectores.

Solución:

a)

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-0)^2+(z-3)^2}\Longrightarrow$$

$$\pi: 4x+4y-6z+5=0$$

b)

$$\frac{|3x-y+2z-9|}{\sqrt{14}}=\frac{|2x+3y+z-1|}{\sqrt{14}}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\pi: x-4y+z-8=0\\ \pi': 5x+2y+3z-10=0\end{array}\right.$$