Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2019

Problema 1 *(3 puntos).* Sean el plano $\pi : x + y + 3z - 1 = 0$ y la recta $r : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$
se pide:

a) Encontrar una recta s perpendicular a π que pase por el punto $P(1, 0, -2)$.

b) Encontrar una recta t paralela a r que pase por P.

c) Encontrar un plano π' paralelo a π que contenga a P

d) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π. En el caso de que se corten, calcular el punto de corte y el ángulo que forman.

e) Encontrar un plano π'' perpendicular a π que contenga a r.

f) Encontrar la recta h que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 3), \quad r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \\ P_r(0, 2, 1) \end{cases}$$

a)

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 3) \\ P_s = P(1, 0, -2) \end{cases} \Longrightarrow s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases}$$

b)

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} = (1, 2, -1) \\ P_t = P(1, 0, -2) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

c)

$$\pi' : x + y + 3z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 + 0 - 6 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5$$
$$\pi' : x + y + 3z + 5 = 0 \Longrightarrow P \in \pi'$$

d)

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Longrightarrow \lambda + (2 + 2\lambda) + 3(1 - \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow !`4 = 0!$$

Luego la recta r es paralela al plano π y no se cortan. Por la misma razón el ángulo que forman es 0º. Se puede comprobar que $\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0$

e)

$$\pi'' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,1,3) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,2,-1) \\ P_r(0,2,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi'' : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y-2 \\ 3 & -1 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 7x - 4y - z + 9 = 0$$

f)

$$h : \left\{ \begin{array}{l} x + y + 3z - 1 = 0 \\ 7x - 4y - z + 9 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2 puntos).* Sea el punto $P(2,-1,1)$. Se pide

a) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto del plano $\pi : 2x + y - z - 1 = 0$.

b) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto de la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + 2z = 0 \end{array} \right.$

Solución:

a) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,1,-1) \\ P_t = P(2,-1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π:

$$2(2+2\lambda) + (-1+\lambda) - (1-\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 1/3 = 5/3 \\ y = -1 - 1/6 = -7/6 \\ z = 1 + 1/6 = 7/6 \end{array} \right. \Longrightarrow P'\left(\frac{5}{3}, -\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$
$$\left(\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right) - (2,-1,1) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

b) Segimos el siguiente procedimiento: $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

- Calculamos un plano $\pi \perp r / P \in \pi$:

$$-2x - 2y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow -4 + 2 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$$

$$\pi : -2x - 2y + z + 1 = 0 \Longrightarrow \pi : 2x + 2y - z - 1 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π:

$$2(-2\lambda) + 2(-1 - 2\lambda) - (\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2/3 \\ y = -1 + 2/3 = -1/3 \\ z = -1/3 \end{array}\right. \Longrightarrow P'\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$

$$\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) - (2, -1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$