# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

**Diciembre 2018**

**Problema 1** Sean los vectores $\overrightarrow{u}=(m,2,m)$, $\overrightarrow{v}=(3,-m,2)$ y $\overrightarrow{w}=(7,-7,4)$. Calcular $m$ de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 3 & -m & 2 \\ 7 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 3m^2-7m+4=0 \Longrightarrow m=1,\ \ m=\frac{4}{3}$$

Si $m=1$ o $m=\frac{4}{3}$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

**Problema 2** Se pide:

1. Calcular $m$ para que los vectores $\overrightarrow{u}=(3,m,-2)$ y $\overrightarrow{v}=(m,-m,1)$ sean perpendiculares.
2. Encontrar un vector perpendicular $\overrightarrow{u}=(1,3,-1)$ y a $\overrightarrow{v}=(1,0,1)$ que tenga módulo 7.
3. Decidir si los vectores $\overrightarrow{u}=(7,-2,1)$ y $\overrightarrow{v}=(1,3,-1)$ son perpendiculares.

**Solución:**

1. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-m^2+3m-2=0 \Longrightarrow m=1$ y $m=2$
2. $$\overrightarrow{w}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3,-2,-3) \Longrightarrow |\overrightarrow{w}|=\sqrt{22}$$
   $$\overrightarrow{t}=\frac{7}{\sqrt{22}}(3,-2,-3)=\left(\frac{21\sqrt{22}}{22},\frac{-7\sqrt{22}}{11},-\frac{21\sqrt{22}}{22}\right)$$
3. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=7-6-1=0 \Longrightarrow \overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$

**Problema 3** Sean los vectores $\overrightarrow{u}=(1,0,-2)$, $\overrightarrow{v}=(1,1,0)$ y $\overrightarrow{w}=(0,2,-1)$. Calcular:

1. Volumen de paralelepípedo que determinan.

2. Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

3. Altura del paralelepípedo.

4. Volumen del tetraedro que determinan.

5. Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

6. Altura del tetraedro.

**Solución:**

1.
$$V_p = |\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}| = |-5| = 5\ u^3$$

2.
$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = |(2, -2, 1)| = \sqrt{9} = 3\ u^2$$

$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ u$$

3.
$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{5}{3}\ u$$

4.
$$V_t = \frac{5}{6}\ u^3$$

5.
$$S_t = \frac{3}{2}\ u,\ \ h_t = h_p = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ u$$

6.
$$H_t = H_p = \frac{5}{3}\ u$$

**Problema 4** Sean los puntos $A(-1, 3, 1)$, $B(4, -1, 2)$ y $C(7, 7, 3)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Encontrar el 4º vértice $D$.

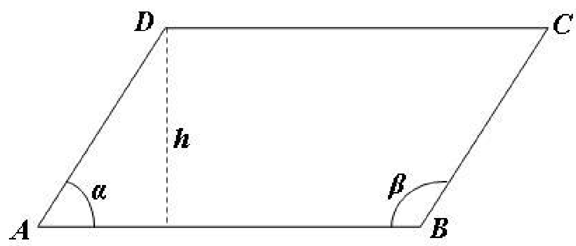
2. Calcular la longitud de sus lados.

3. Calcular sus ángulos y su centro.

4. Calcular el punto simétrico de $A$ respecto de $C$.

5. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

**Solución**




1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1, 3, 1) + (3, 8, 1) = (2, 11, 2)$.

2. $|\overrightarrow{AB}| = |(5, -4, 1)| = \sqrt{42}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(3, 8, 1)| = \sqrt{74}$

3. $$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-16}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{74}} \Longrightarrow \alpha = 106^{\circ}40'42'' \text{ y } \beta = 73^{\circ}19'18''$$

   El centro es $M(3, 5, 2)$

4. $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (15, 11, 5)$

5. $$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
   $$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-1, 3, 1) + \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right)$$
   $$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{5}{3}, \frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right) + \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{13}{3}, \frac{17}{3}, \frac{7}{3}\right)$$
   $$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{13}{3}, \frac{17}{3}, \frac{7}{3}\right) + \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = (7, 7, 3)$$