Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2018

Problema 1 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (m, 3, -m)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, m)$ y $\overrightarrow{w} = (3, 4, m-1)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & 3 & -m \\ 2 & 1 & m \\ 3 & 4 & m-1 \end{vmatrix} = -3(m^2 + m - 2) = 0 \Longrightarrow m = 1,\ m = -2$$

Si $m = 1$ o $m = -2$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

1. Calcular m para que los vectores $\overrightarrow{u} = (m, m, -1)$ y $\overrightarrow{v} = (4, -3, 2m - 1)$ sean perpendiculares.
2. Encontrar un vector perpendicular $\overrightarrow{u} = (1, 0, 2)$ y a $\overrightarrow{v} = (2, -1, 0)$ que tenga módulo 5.
3. Decidir si los vectores $\overrightarrow{u} = (-1, 4, 1)$ y $\overrightarrow{v} = (3, 1, -1)$ son perpendiculares.

Solución:

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 4m - 3m - 2m + 1 = 0 \Longrightarrow m = 1$
2. $$\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 4, -1) \Longrightarrow |\overrightarrow{w}| = \sqrt{21}$$
$$\overrightarrow{t} = \frac{5}{\sqrt{21}}(2, 4, -1) = \left(\frac{10\sqrt{21}}{21}, \frac{20\sqrt{21}}{21}, \frac{-5\sqrt{21}}{21} \right)$$
3. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -3 + 4 - 1 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (1, -5, 2)$, $\overrightarrow{v} = (3, 0, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (0, 4, -1)$. Calcular:

1. Volumen de paralelepípedo que determinan.

2. Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

3. Altura del paralelepípedo.

4. Volumen del tetraedro que determinan.

5. Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

6. Altura del tetraedro.

Solución:

1.
$$V_p = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1\ u^3$$

2.
$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}| = |(-10, 4, 15)| = \sqrt{341}\ u^2$$

$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = \sqrt{\frac{341}{13}}\ u$$

3.
$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{\sqrt{341}}{341}\ u$$

4.
$$V_t = \frac{1}{6}\ u^3$$

5.
$$S_t = \frac{\sqrt{341}}{2}\ u^3,\ \ h_t = h_p = \sqrt{\frac{341}{13}}\ u$$

6.
$$H_t = H_p = \frac{41\sqrt{341}}{341}\ u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(1, -3, 1)$, $B(4, 0, -1)$ y $C(7, 3, 10)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

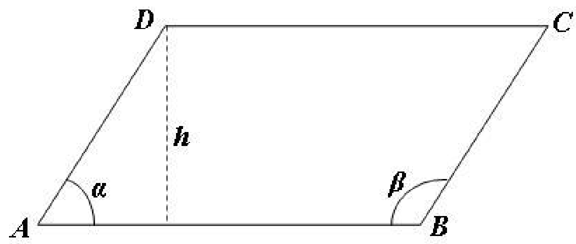
1. Encontrar el 4º vértice D.

2. Calcular la longitud de sus lados.

3. Calcular sus ángulos y su centro.

4. Calcular el punto simétrico de A respecto de C.
5. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

Solución



1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (1, -3, 1) + (3, 3, 11) = (4, 0, 12)$.
2. $|\overrightarrow{AB}| = |(3, 3, -2)| = \sqrt{22}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(3, 3, 11)| = \sqrt{139}$
3. $$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-4}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{139}} \Longrightarrow \alpha = 94^o 08' 53'' \text{ y } \beta = 85^o 51' 7''$$

   El centro es $M\left(4, 0, \frac{11}{2}\right)$
4. $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (13, 9, 19)$
5. $$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = (2, 2, 3)$$
   $$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (1, -3, 1) + (2, 2, 3) = (3, -1, 4)$$
   $$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = (3, -1, 4) + (2, 2, 3) = (5, 1, 7)$$
   $$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = (5, 1, 7) + (2, 2, 3) = (7, 3, 10)$$