Examen de Matemáticas II (Valencia-Junio 2019) Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$ y que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$,siendo I la matriz identidad de orden 3.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (2+2 puntos) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$.

b) (3 puntos) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$.

c) (3 puntos) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = 2(a^2 + 2a + 1) = 0 \Longrightarrow a = -1$. Luego si $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
Si $a = -1 \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.
Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = 8 \Longrightarrow |2A^{-1}| = 2^3\dfrac{1}{|A|} = \dfrac{8}{8} = 1$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) =$$
$$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \dfrac{3}{2} - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

c) $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B \Longrightarrow 3(B^2 + 2B) = I \Longrightarrow B(3B + 6I) = I \Longrightarrow$

$B^{-1} = 3B + 6I$, luego B es inversible con $m = 3$ y $n = 6$.

Problema 2 Consideramos en el espacio las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{array} \right.$ y $s : x = y + 1 = \dfrac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (3 puntos) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

b) (4 puntos) La recta que pasa por $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r.

c) (3 puntos) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi : x - 2y + az = b$.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{array} \right.$$

Tenemos: $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 3, 3) \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 2) \\ P_s(0, -1, 2) \end{array} \right.$

a) $\overrightarrow{P_sP_r} = (0, 3, 3) - (0, -1, 2) = (0, 4, 1)$.

$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow r$ y s no se cruzan. Tenemos $\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{P_sP_r} \\ \overrightarrow{u_r} \end{pmatrix} = 2$ y $\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{u_s} \end{pmatrix} = 1$ por lo que r y s son paralelas.

El plano π que contiene a ambas rectas vendrá determinado por:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP_r} = (0, 4, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 3, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y - 3 & z - 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 7x + y - 4z + 9 = 0$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi' \perp r$ tal que $P(0, -1, 2) \in \pi'$:

$$\pi' : x + y + 2z + \lambda = 0 \Longrightarrow 0 - 1 + 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -3 \Longrightarrow$$

$$\pi' : x + y + 2z - 3 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de π' y r:

$(\lambda)+(3+\lambda)+2(3+2\lambda)-3=0 \Longrightarrow 6\lambda+6=0 \Longrightarrow \lambda=-1 \Longrightarrow$

$$P'(-1,2,1)$$

- La recta t buscada vendrá definida por:
$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{PP'}=(-1,2,1)-(0,-1,2)=(-1,3,-1)\\ P_t=P(0,-1,2)\end{array}\right. \Longrightarrow$

$$t:\left\{\begin{array}{l}x=-\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=2-\lambda\end{array}\right.$$

c) $s\subset\pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_s}\perp\overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{u_s}\cdot\overrightarrow{u_\pi}=(1,1,2)\cdot(1,-2,a)=1-2+2a=0 \Longrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

$P_s\in\pi \Longrightarrow 0+2+2\cdot\dfrac{1}{2}=b \Longrightarrow b=3$

Problema 3 Se considera la función $f(x)=xe^{-x^2}$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (3 puntos) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

b) (2 puntos) La representación gráfica de la curva $y=f(x)$.

c) (1 punto) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [-0,1] a la función $g(x)=f(x)+ax$.

d) (4 puntos) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$ e $\int xe^{-x}\,dx$

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x}{e^{x^2}}$, $f(0)=0$ y $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

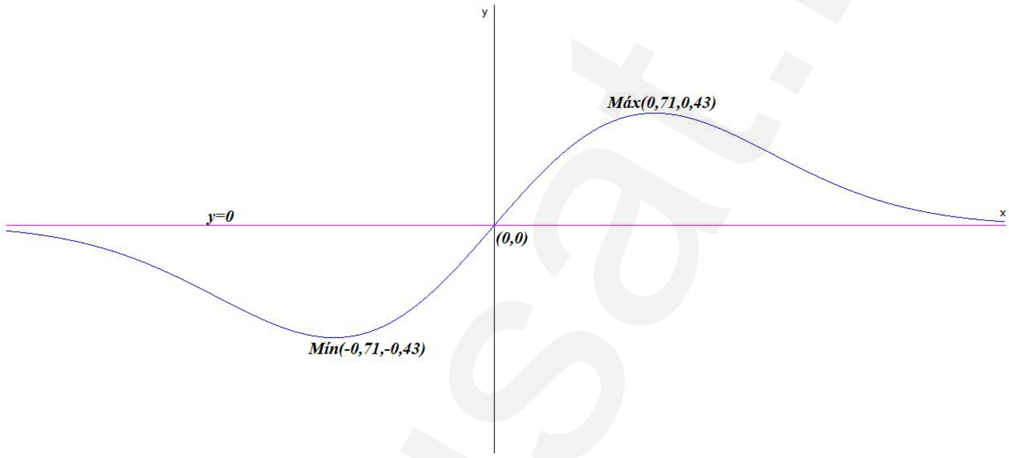
- Asíntotas verticales no hay, el denominador nunca se anula, horizontales en $y=0$ ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x}{e^{x^2}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{1}{2xe^{x^2}}=0$ y oblicuas no hay al haber horizontales.

- $f'(x)=e^{-x^2}(1-2x^2)=0 \Longrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$ y creciente en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(-0,71,-0,43)$ y un máximo relativo en $(0,71,0,43)$.

b) Representación:



c)

$$\int f(x)\,dx=\int xe^{-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$$

$$\int xe^{-x}\,dx=\left[\begin{array}{l} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=e^{-x}\,dx\Longrightarrow v=-e^{-x}\end{array}\right]=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx=$$

$$-xe^{-x}-e^{-x}+C=-e^{-x}(x+1)+C$$

Examen de Matemáticas II (Valencia-Junio 2019) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 Se da el sistema $\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 4\\ 3x+ & 4y+ & 5z= & 5\\ 7x+ & 9y+ & 11z= & \alpha\end{array}\right.$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (4 puntos) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible.

b) (4 puntos) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

c) (2 puntos) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 5 & 5\\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-3F_1\\ F_3-7F_1 \end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -7\\ 0 & 2 & 4 & \alpha-28 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-2F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -7\\ 0 & 0 & 0 & \alpha-14 \end{array}\right)$$

Si $\alpha=14$ el sistema es compatible indeterminado y si $\alpha\neq 14$ el sistema sería incompatible.
Como $|A|=0$ para cualquier valor de α el sistema nunca sería compatible determinado.

$$\text{Si } \alpha=14 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 4\\ 3x+ & 4y+ & 5z= & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=11+\lambda\\ y=-7-2\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Si cambiamos 11 por a: $A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 5\\ 7 & 9 & a \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=a-11=0\Longrightarrow$ el único valor que anula el determinate es $a=11$ luego para cualquier otro valor, como es el caso, $|A|\neq 0$ el sistema sería compatible determinado.

Problema 2 Sea π el plano de ecuación $9x+12y+20z=180$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (4 puntos) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π.

b) (4 puntos) Los puntos A, B y C intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

c) (2 puntos) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos A, B y C.

Solución:

a) Sea un plano $\pi_1: 9x+12y+20z+a=0$ paralelo a π, elegimos un punto cualquiera del plano π, por ejemplo $P(0,0,9)$, y calculamos $d(P,\pi_1)=\dfrac{|0+0+180+a|}{\sqrt{81+144+400}}=\dfrac{|180+a|}{\sqrt{625}}=4\Longrightarrow |180+a|=100$, tendremos dos soluciones:

- $180+a=100\Longrightarrow a=-80\Longrightarrow \pi_1': 9x+12y+20z-80=0$

- $180 + a = -100 \Longrightarrow a = -280 \Longrightarrow \pi_1'' : 9x + 12y + 20z - 280 = 0$

b) Puntos de corte con los ejes del plano $\pi : 9x + 12y + 20z = 180$:

- Con OX: hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 9x = 180 \Longrightarrow x = 20 \Longrightarrow A(20, 0, 0)$
- Con OY: hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow 12y = 180 \Longrightarrow y = 15 \Longrightarrow B(0, 15, 0)$
- Con OZ: hacemos $x = 0$ e $y = 0 \Longrightarrow 20z = 180 \Longrightarrow z = 9 \Longrightarrow C(0, 0, 9)$

$\overrightarrow{AB} = (0, 15, 0) - (20, 0, 0) = (-20, 15, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, 0, 9) - (20, 0, 0) = (-20, 0, 9)$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{400}{\sqrt{625}\sqrt{481}} = \frac{16}{\sqrt{481}} \Longrightarrow \alpha = 43^{\circ}9'8''$$

c) $\overrightarrow{OA} = (20, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 15, 0)$ y $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 9)$:

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|2700| = 450\ u^3$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son $(0, 0)$ y $(250, 0)$, respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1). El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

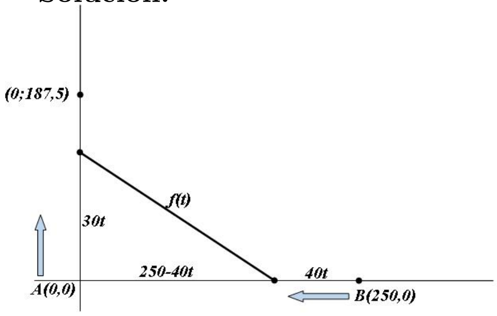
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (2 puntos) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse.

b) (4 puntos) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto.

c) (4 puntos) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima.

Solución:



a) $f(t) = \sqrt{(250-40t)^2 + (30t)^2} = 50\sqrt{t^2 - 8t + 25}$

b) $T = \dfrac{e}{v} = \dfrac{250}{40} = 6,25$ horas. O bien $T = \dfrac{e}{v} = \dfrac{187,5}{30} = 6,25$ horas.

c) La función f estaría definida en el intevalo $[0, 25/4]$, tendríamos $f(0) = 250$ y $f(25/4) = 187,5$.

$$f'(t) = 50\frac{2t-8}{2\sqrt{t^2-8t+25}} = 0 \Longrightarrow 2t-8 = 0 \Longrightarrow t = 4$$

	$(0,4)$	$(4,25/4)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(0,4)$ y creciente en el intervalo $\left(4, \frac{25}{4}\right)$. La función presenta un mínimo relativo en el punto $(4,150)$ y tendría el máximo en $(0,250)$ que serían las posiciones iniciales de los móviles.